

BİDGE Yayınları

Modern Matematikte Yeni Yaklaşımlar

Editör: Prof. Dr. İlker Eryılmaz

ISBN: 978-625-372-065-0

1. Baskı

Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL

Yayınlama Tarihi: XX.XX.2023

BİDGE Yayınları

Bu eserin bütün hakları saklıdır. Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında yayıncının ve editörün yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Sertifika No: 71374

Yayın hakları © BİDGE Yayınları

www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com

Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.

Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya /
Ankara



İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER	3
Demi M-Kompakt Operatörler.....	4
Birol ALTIN.....	4
Homotopi 2-tip Yapıların Bazı Kategoriksel Özellikleri	10
Elis SOYLU YILMAZ	10
α -Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar	22
Hakan ÖZTÜRK	22
Emine BEKTAŞ	22
Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller Ve Kompleksler	44
Hatice TAŞBOZAN	44
İnternal Kategoriler ve Çaprazlanmış Modüller	56
Koray YILMAZ	56

BÖLÜM I

Demi M-Kompakt Operatörler

Birol ALTIN¹

Giriş

Demi gösterimi ilk olarak 1966 yılında Petryshyn'in "Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space " isimli makalesinde kullanılmıştır (Petryshyn, 1966). 2019' da zayıf demi-kompakt lineer operatörler sınıfının bazı sonuçlarını incelediler (Krichen & O'Regan, 2019). Daha sonra Dunford Pettis operatörlerinin bir genellemesi olan demi Dunford-Pettis operatörleri sınıfını tanıttılar (Benkhaled, Hajji & Jeribi, 2022).

Bu çalışmada, ilk defa 1979 yılında P. G. Dodds, H. Fremlin tarafından verilen M-kompakt operator sınıfının bir genelleştirmesi olan demi- M kompakt operatörlerin sınıfı tanıtılmıştır.

E bir Banach örgüsü, F bir Banach uzayı ve $T:E \rightarrow F$ ye bir operatör olsun. Eğer her $x \in E^+$ için $T([0, x])$ kümesi, F normlu uzayında de göreceli (relatively) kompakt küme oluyorsa T ye bir

¹ Prof. Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, Teknikokullar, Ankara.

M – kompakt operator denir (Dodds & Fremlin, 1979). E den F içine bütün M -kompakt operatörlerin kümesini $L_{mk}(E, F)$ ile gösterilecektir. E ve F iki Banach örgüsü olmak üzere $S \leq T$ sıralaması $S(x) \leq T(x)$ all $x \in E^+$ anlamına gelecektir. Özdeşlik operatörü I ile gösterilecektir. Tanımlanmayan tanım ve notasyonlar için (Aliprantis & Burkinshaw, 1978)' ye bağlı kalınacaktır.

Temel Sonuçlar

Tanım 1. E bir Banach örgüsü ve operator $T: E \rightarrow E$ ye bir sürekli operator olsun. Eğer her $x \in E^+$ ve $[0, x]$ aralığındaki her $\{x_n\}$ dizisi için $(x_n - T(x_n))$ dizisinin bir $(x_{n_k} - T(x_{n_k}))$ yakınsak alt dizisi olduğunda (x_{n_k}) dizisinin bir yakınsak bir $(x_{n_{k_m}})$ alt dizisi oluyorsa, T ye bir demi M -kompakt operator denir. E üzerinde tanımlı bütün demi M -kompakt operatörlerin sınıfını $\mathcal{DL}_{mk}(E)$ ile göstereceğiz.

Örnek 1 E bir Banach örgüsü olsun. O zaman her $\alpha \neq 1$ için $\alpha I \in \mathcal{DL}_{mk}(E)$ olur.

Her $x \in E^+$ için $[0, x]$ aralığındaki her $\{x_n\}$ dizisi için $(x_n - T(x_n))$ dizisinin bir $(x_{n_k} - \alpha I(x_{n_k}))$ yakınsak alt dizisi olsun. O zaman $(x_{n_k} - \alpha I(x_{n_k})) = (1 - \alpha)(x_{n_k})$ yakınsak olur. Dolayısıyla (x_{n_k}) E de yakınsak olur. Dolayısıyla, αI , demi M -kompakt operatör olur.

Örnek 2 $k \in \mathbb{N}$ olsun. $T_k: c \rightarrow c$ operatörü her $x = (x_i) \in c$ için $T_k(x) = \sum_{i=1}^k x_i e_i$ olarak tanımlansın. Burada c , $\mathbb{R}$. nin sıfıra yakınsak dizilerinin uzayıdır ve $T_k: c \rightarrow c$ operatörü demi M -kompakt operatördür. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $S_k = I + T_k$ operatörünü tanımlayalım. Kolaylıkla görülebilir ki her $k \in \mathbb{N}$ için S_k operatörü demi M -kompakt operator değildir.

Teorem 1 E bir Banach örgüsü olsun. E üzerinde tanımlı her M -kompakt operator bir demi M -kompakt operatör olur.

İspat T, E üzerinde bir M-kompakt operatör, her bir $x \in E^+$ için $\{x_n\} \subseteq [0, x]$ dizisi için $(x_n - T(x_n))$ dizisinin bir $(x_{n_k} - T(x_{n_k}))$ yakınsak alt dizisi olsun. $T: E \rightarrow E$ bir M-kompakt operatör olduğundan $T(x_{n_{k_m}})$ yakınsak olacak şekilde bir $(x_{n_{k_m}})$ alt dizisi mevcut olur.

$x_{n_{k_m}} = x_{n_{k_m}} - T(x_{n_{k_m}}) + T(x_{n_{k_m}})$ olduğundan ve sırasıyla $x_{n_{k_m}} - T(x_{n_{k_m}})$ ve $T(x_{n_{k_m}})$ yakınsak olduğundan $(x_{n_{k_m}})$ yakınsak olur bu ise T nin bir demi M-kompakt operatör olduğunu verir.

Aşağıdaki örnek bu teoremin tersinin genelde doğru olmadığını verecektir.

Örnek 3 $T: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$ ve $T = \frac{1}{2} I$ olsun. $C[0,1]$ sıra sürekli norma sahip olmadığından Sonuç 21.13 (Aliprantis & Burkinshaw, 1978), T bir M-kompakt operatör değildir.

Teorem 2 E bir Banach örgüsü, $T: E \rightarrow E$ bir M-kompakt operatör ve $S: E \rightarrow E$ bir demi M-kompakt operatör olsun O zaman $T + S$ bir demi M-kompakt operatör olur.

İspat Her bir $x \in E^+$ için $\{x_n\} \subseteq [0, x]$ dizisi için $(x_n - (T + S)(x_n))$ dizisinin bir $(x_{n_k} - (T + S)(x_{n_k}))$ yakınsak alt dizisi olsun. $T: E \rightarrow E$ bir M-kompakt operatör olduğundan $T(x_{n_{k_m}})$ yakınsak olacak şekilde bir $(x_{n_{k_m}})$ alt dizisi mevcut olur.

Dolayısıyla Bu iki dizinin toplamı olan,

$(x_{n_{k_m}} - S(x_{n_{k_m}})) = (x_{n_{k_m}} - (T + S)(x_{n_{k_m}})) + T(x_{n_{k_m}})$ alt dizisi yakınsak olacağından $(x_{n_{k_m}} - S(x_{n_{k_m}}))$ alt dizisi de

yakınsak olur. S bir demi M-kompakt operatör olduğundan $(x_{n_{k_m}})$ dizisinin bir yakınsak alt dizisi olur. Bu ise $T + S$ operatörünün bir demi M-kompakt operatör olduğunu verir.

Ancak, genelde iki demi M-kompakt operatörün toplamı bir demi M-kompakt operatör olmayabilir.

Örnek 4 $T_1, T_2: C[0,1] \rightarrow C[0,1]$, operatörleri her $f \in C[0,1]$ için $T_1(f) = T_2(f) = \frac{1}{2}f$ olarak tanımlansın. $C[0,1]$ sıra sürekli norma sahip olmadığından Sonuç 21.13, (Aliprantis & Burkinshaw, 1978), $T_1 + T_2 = I$ bir demi M-kompakt operatör değildir.

Aşağıdaki teorem bir Banach örgüsünün discrete ve sıra sürekli norma sahip olmasını karakterize edecektir.

Teorem 3 E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdakiler birbirine denktir

(i) E discrete ve sıra sürekli norma sahiptir.

(ii) $L_{mk}(E, F) = \mathfrak{D}L_{mk}(E)$

Proof (i) $\Rightarrow$ (ii) Teorem 1 den $L_{mk}(E, F) \subset \mathfrak{D}L_{mk}(E)$ olduğu açıktır. $\mathfrak{D}L_{mk}(E) \subset L_{mk}(E, F)$

olduğunu görelim. $T \in \mathfrak{D}L_{mk}(E)$ ve $x \in E^+$ olsun. Teorem 12.9 (Aliprantis & Burkinshaw, 2006) ve Sonuç 21.13 (Aliprantis & Burkinshaw, 1978) den $[0, x] \subset E$ kompakttır. $T: E \rightarrow E$ sürekli olduğundan $T([0, x])$, F de kompakt dolayısıyla göreceli kompakt olacağından, $T, L_{mk}(E, F)$ uzayının elemanı olur.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $L_{mk}(E, F) = \mathfrak{D}L_{mk}(E)$ olsun. $\frac{1}{2}I$ demi M-kompakt operator olduğundan hipotezden, $\frac{1}{2}I$, $L_{mk}(E, F)$ uzayına ait olur. Bu ise Teorem 12.9 (Aliprantis & Burkinshaw, 2006) ve Sonuç 21.13 (Aliprantis & Burkinshaw, 1978) den E nin discrete ve sıra sürekli norma sahip olduğunu verir.

Sonuç 21.13 (Aliprantis & Burkinshaw, 1978) ve yukarıdaki önerme birlikte gözönüne alınırsa aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Teorem 4 E bir Banach örgüsü olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) $T: E \rightarrow E$ her operator demi M-kompakt operatördür.
- (ii) $I: E \rightarrow E$ bir demi M-kompakt operatördür.
- (iii) E discrete ve sıra sürekli norma sahiptir.

Dikkat edilmelidir ki T bir demi M-kompakt operatör ve $0 \leq S \leq T$ olduğunda S bir demi M-kompakt operatör olmayabilir.

Örnek 6 T ve S $C[0,1]$ üzerinde tanımlı $S = I$ and $T = 2I$ olacak şekilde iki operatör olsunlar. $0 \leq S \leq T$ ve $T, \mathfrak{D}L_{mk}(E)$ sınıfına ait olur. Fakat $S, \mathfrak{D}L_{mk}(E)$ sınıfına ait değildir.

KAYNAKÇA

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (2006). Positive Operators. Berlin: Springer

Aliprantis, C.D. & Burkinshaw, O. (1978). Locally Solid Riesz Spaces. New York: Academic Press

Benkhaled, H. & Elleuch, A. & Jeribi, A. (2020). The class of order weakly demicompact operators. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 114(2), 1-8. Doi: 10.1007/s13398-020-00808-4

Benkhaled, H. & Hajji, M. & Jeribi, A. (2022). On the class of Demi Dunford- Pettis Operators. Circolo Matematico di Palermo Ser 2, 1-11. Doi: 10.1007/s12215-021-00702-x

Krichen, B. & O'Regan, D. (2019). Weakly demicompact linear operators and axiomatic measures of weak noncompactness. Mathematica Slovaca, 69(6), 1403-1412. Doi: 10.1515/ms-2017-0317

Petryshyn, W.V. (1966). Construction of fixed points of demicompact mappings in Hilbert space. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 14(2), 276-284. Doi: 10.1016/0022-247X(66)90027-8

Dodds, P. G. & Fremlin, D.H. (1979). Kompakt Operators in Banach Lattices. Israel Journal of Mathematics, 34, 287-320. Doi: 10.1007/BF02760610

BÖLÜM II

Homotopi 2-tip Yapıların Bazı Kategoriksel Özellikleri

Elis SOYLU YILMAZ¹

Giriş

Homotopi 2-tipi, bir uzayın özelliklerini sadece 2. homotopi grubu π_2 kadar düşündüğümüz bir bakış açısıdır. Bu bakış açısı, uzayın temel özelliklerini, 0, 1 ve 2. boyutta olan homotopi gruplarına dayalı olarak değerlendirmemizi sağlar. Bu kapsamda, uzayın topolojik yapısını anlamak için 0, 1 ve 2 boyutlardaki değişmezlere odaklanan dönüşümleri inceleriz. Bu dönüşümler, uzayın 2-eşdeğerlikleri olarak adlandırılır ve uzayın temel topolojik özelliklerini belirleyen önemli unsurları içerir. Sürekli bir $f: X \rightarrow Y$ dönüşümü, her bir baz noktasında π_i için $i = 0,1,2$ üzerinde izomorfizmaları meydana getiriyorsa, bu dönüşüm bir homotopi 2-eşdeğerlik olarak adlandırılır. İki uzay aynı homotopi 2-tipini

¹ Koray Yılmaz, Dr.Öğretim Üyesi, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Matematik Bölümü

sahipse, bu uzaylar arasında bir zigzag zinciri homotopi 2-eşdeğerlikleri ile bağlantılı olur. Yani, bu uzaylar arasındaki topolojik benzerlik, bir dizi homotopi 2-eşdeğerliği aracılığıyla sağlanan bir bağlantı ağıyla ifade edilir. Bu zincir, her adımda 0, 1 ve 2. homotopi gruplarında izomorfizmaları içerir, bu da uzayların belirli topolojik özelliklerinin birbirine dönüştürülebilir olduğunu gösterir.

Grupların çapraz modülleri kavramı, Whitehead'in 1941 yılında ortaya koyduğu ve daha sonra 1949'da genişlettiği temel bir tanımdır; hem homotopi teoride hem de homoloji teoride önemli bir yer tutar. Çaprazlanmış modüller, homotopi teorisi ve homolojik cebir bağlamında temel cebirsel yapıları ve ilişkileri yakalamak için güçlü bir araç sunar, daha yüksek boyutlu cebirsel nesneleri anlama ve analiz etme konusunda etkili bir araçtır. n-kategorik bakış açısından bakıldığında bir çaprazlanmış modül:

- Normal bir alt grubun içine dönüşümü,
 - Modüllerini özel bir çarpımı,
 - Grup üzerinde otomorfizmaların bir etkisi,
 - Dereceleri 1 ve 2' için bir çaprazlanmış kompleks,
 - Uzunluğu 2 olan değişmeli olmayan bir zincir kompleksi,
 - Belirli simplicial grupların Moore kompleksi,
- olarak ele alınabilir.

Tanım: Grupların çaprazlanmış modülü aşağıdaki verilenlerden oluşur:

- İki grup, G_2 ve G_1 ,
- G_2 'den G_1 'e bir grup homomorfizması:

$$\delta: G_2 \rightarrow G_1$$

- G_1 den G_2 'nin otomorfizm grubuna bir grup homomorfizması:

$$\alpha: G_1 \rightarrow \text{Aut}(G_2)$$

- Bu homomorfizmaları, eşdeğer olarak, bir fonksiyon olarak düşünebileceğimiz bir fonksiyon

$$\alpha: G_1 \times G_2 \rightarrow G_2$$

Bu unsurlar, G_1 -etki özelliğini sağlayan ve her $g_1 \in G_1$ için G_2 'nin bir grup otomorfizmi olan bir fonksiyon, α , olmalıdır. Ayrıca, aşağıdaki diyagramların değişmeli olması gerekir.

$$\begin{array}{ccc}
 G_2 \times G_2 & \xrightarrow{\delta \times Id} & G_1 \times G_2 \\
 & \searrow Ad & \swarrow \alpha \\
 & G_2 &
 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 \times G_2 & \xrightarrow{\alpha} & G_2 \\
 Id \times \delta \downarrow & & \downarrow \delta \\
 G_1 \times G_1 & \xrightarrow{Ad} & G_1
 \end{array}$$

Burada Ad dönüşümü bir grubun kendi üzerine olan eşlenik etkisidir.

Eğer $g_1 \in G_1$ ile $g_2 \in G_2$ üzerine etki etmenin sonucunu $^{g_1}g_2$ olarak yazarsak, o zaman ikinci diyagram aşağıdaki denkleme çevrilebilir:

$$\delta(^{g_1}g_2) = g_1\delta(g_2)g_1^{-1}$$

Başka bir deyişle, δ , G_1 etkisi için eşdeğerdir.

İlk diyagram için G_2 , grubunun iki farklı şekilde etkisi söz konusudur, (i) bilinen eşlenik etki ile,

$$^{g_2}g'_2 = g_2g'_2g_2^{-1}$$

ve (ii) önce g_2 elamanını G_1 içine taşıyarak ve ardından bu grubun G_2 üzerindeki etkisini kullanarak. İlk diyagram, bu iki eylemin örtüşüğünü ifade eder. Denklemlerle ifade edildiğinde:

$$\delta(^{g_2})g'_2 = g_2g'_2g_2^{-1}$$

Bu denklem, literatürde "Peiffer kuralı" olarak bilinir.

Tanım: $\delta: G_2 \rightarrow G_1$ ve $\delta': H_2 \rightarrow H_1$ birer çaprazlanmış modüle olmak üzere,

$$f_1: G_1 \rightarrow H_1$$

$$f_2: G_2 \rightarrow H_2$$

grup homomorfizmleri olsun. Eğer her $r \in R$ ve her $c, c' \in C$ için

$$f_2(^{g_1}g_2) = f_1(^{g_1})f_2(g_2)$$

şartı sağlanıyor ve

$$\begin{array}{ccc}
G_2 & \xrightarrow{\delta} & G_1 \\
\downarrow f_2 & & \downarrow f_1 \\
H_2 & \xrightarrow{\delta'} & H_1
\end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa

$$(f_2, f_1): (G_2, G_1, \delta) \rightarrow (H_2, H_1, \delta')$$

morfizmine çaprazlanmış modül morfizmi denir. Böylece ***XMOD*** ile göstereceğimiz çaprazlanmış modüller kategorisini elde ederiz.

Geriekme obje, eş-eşitleyici, çekirdek ikili, tamlık gibi literatürdeki temel kategori teori kitaplarında (MacLane, 2013) bulunan tanımları verelim. Çaprazlanmış modüller için kategoriksel özellikler cebirler üzerinde (Shammu,1993) doktora tezinde incelenmiştir. Gruplar üzerinde daha yüksek boyutlarda 2-çaprazlanmış modüller için tamlık (Yılmaz, 2017), ve cebirler üzerinde çaprazlanmış kareler için fibrasyon (Yılmaz, 2018) alışmalarında gösterilmiştir.

Tanım 1.3.1. $\mathcal{C}$ kategorisinde $f: A \rightarrow B$ ve $g: A \rightarrow B$ morfizmleri verilsin. Aşağıdaki zellikleri sağlayan $(\mathcal{C}, h)$ ikilisine (f, g) ikilisinin eş-eşitleyicisi denir.

- i. Herhangi bir $h: B \rightarrow \mathcal{C}$ morfizmi için,

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{h} & C \\
 & \xrightarrow{g} & & &
 \end{array}$$

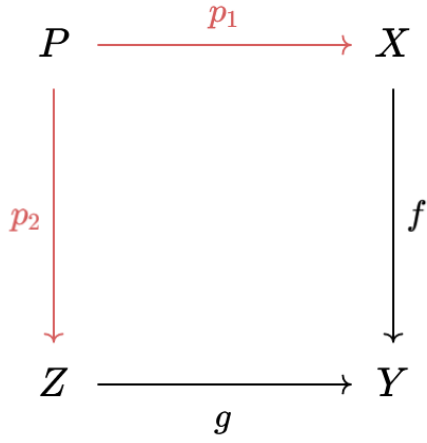
diyagramı için $hf = fg$ eşitliği vardır.

ii. $kf = kg$ olacak şekilde bir $k: B \rightarrow C'$ morfizmi için,

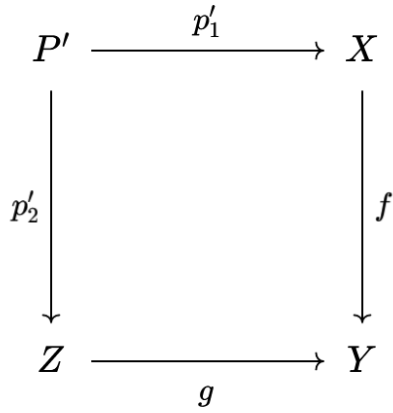
$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{h} & C \\
 & \xrightarrow{g} & & & \\
 & & & \searrow k & \\
 & & & & C' \\
 & & & & \uparrow u \\
 & & & & C
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde yani $uh = k$ olacak şekilde bir tek $u: C \rightarrow C'$ morfizmi vardır.

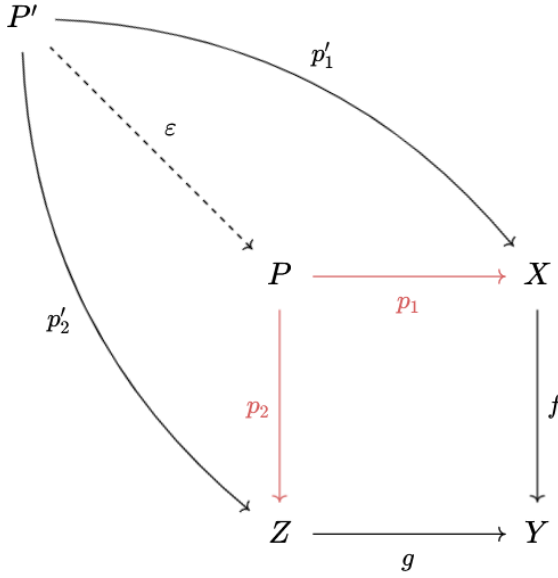
Tanım: $\mathbf{C}$ bir kategori olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ ve $g: Z \rightarrow Y$ morfizmleri için



diyagramı değişmeli olsun. P' herhangi bir obje olmak üzere

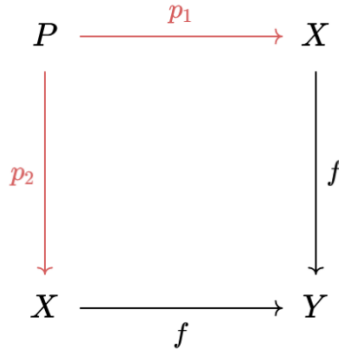


diyagramı değişmeli olsun. Bu durumda



diyagramını değişmeli yapan $\varepsilon: P' \rightarrow P$ morfizmi tek ise (p_1, p_2) ikilisine f ile g morfizmlerinin geri çekmesi denir. P nesnesine geri çekme nesnesi denir.

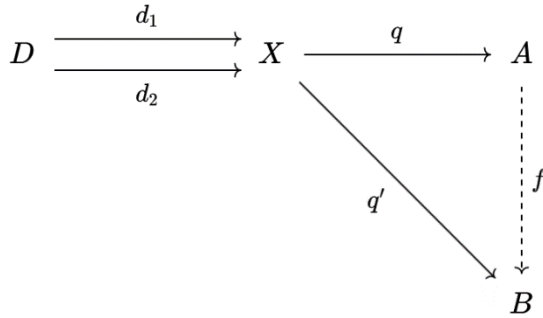
Özel olarak $g = f$ alınırsa



(p_1, p_2) ikilisine f morfizminin çekirdek ikilisi denir.

Geri çekme objeye sahip olan kategorilerde (Shammu, 1993) ve (Yılmaz ve Ulualan, 2019) da kullanılan yöntemler ile kategori üzerine topoloji kurmak mümkündür.

Tanım : $\mathbf{C}$ bir kategori ve (D, d_1, d_2) bu kategoride bir X objesi üzerindeki denklik bağıntısı olmak üzere (d_1, d_2) ikilisinin eş-eşitleyicisi, q , mevcut olsun Yani



$$q \circ d_1 = q \circ d_2$$

için A objesinden kalkan bir q' morfizmi için

$$q' \circ d_1 = q' \circ d_2$$

olduğunda $f \circ q = q'$ olacak şekilde $f: A \rightarrow B$ morfizmi tek olsun.

Ayrıca

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{d_1} & X \\
 \downarrow d_2 & & \downarrow q \\
 X & \xrightarrow{q} & A
 \end{array}$$

diyagramı geri çekme oluyorsa, yani (d_1, d_2) ikilisi q morfizminin çekirdek ikilisi ise A objesi üzerindeki (D, d_1, d_2) denklik bağıntısına etkili bağıntı denir.

Tanım : Eğer $\mathbf{C}$ kategorisi için

1) Her morfizmin çekirdek ikilisi vardır ve bu çekirdek ikili eş-eşitleyiciye sahiptir.

2) Her denklik bağıntısı etkili bağıntıdır.

şartları sağlanıyorsa $\mathbf{C}$ kategorisine tam kategori denir.

Çaprazlanmış modüller için kategoriksel özellikleri üzerine gruplar üzerinde (Wagemann, 2021), (Brown, 1984), cebirler üzerinde (Ellis, 1988), grupoidler üzerinde (Brown, 1987) çeşitli çalışmalar bulunmaktadır. Lie cebirleri üzerinde (İğde ve Yılmaz, 2023), (Ellis, 1991) ve homotopi yüksek tiplerde de (Mutlu ve Porter, 1988), (Yılmaz, 2023) çalışmaları yapılmıştır. Homotopi 2-tip ve daha yüksek boyutlarda kategorik özelliklerin incelendiği çok az rastlanılmaktadır. Homotopi 2-tip yapılarda bulunan kategoriksel özelliklerin incelenerek üst boyutlarda bu ve benzeri özelliklerin korunması veya nasıl değiştiğinin araştırılması önemlidir.

KAYNAKÇA

Brown, R. (1984). Coproducts of crossed P-modules: applications to second homotopy groups and to the homology of groups. *Topology*, 23(3), 337-345.

Ellis, G. J. (1988). Higher dimensional crossed modules of algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 52(3), 277-282.

İğde, E. & Yılmaz, K. (2023). Tensor products and crossed differential graded Lie algebras in the category of crossed complexes. *Symmetry*, 15(9), 1646. Doi: <https://doi.org/10.3390/sym15091646>

Mac Lane, S. (2013). *Categories for the working mathematician*. (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

Mutlu, A. & Porter, T. (1998). Freeness conditions for 2-crossed modules and complexes. *Theory and Applications of Categories*, 4(8), 174-194.

Shammu, N.M. (1992). *Algebraic and categorical structure of categories of crossed modules of algebras*. University College of North Wales.

Wagemann, F. (2021). *Crossed modules*. (Vol. 82). Walter de Gruyter GmbH & Co KG.

Whitehead, J. H. C. (1941). On adding relations to homotopy groups. *Annals of Mathematics*, 409-428.

Whitehead, J. H. C. (1949). Combinatorial homotopy II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55(5), 453-496.

Yılmaz, K. (2018). A fibration application for crossed squares. *Cumhuriyet Science Journal*, 39(1), 1-6.

Yılmaz, K. (2017). 2-Crossed modules over same base. *Sakarya University Journal of Science*, 21(6), 1210-1220.

Yılmaz, K. & Ulualan, E. (2019). Construction of higher groupoids via matched pairs actions. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1492-1503.

Yılmaz, K. (2023). A note on 4-dimensional 2-crossed modules. *Journal of New Theory*, (42), 86-93. Doi: <https://doi.org/10.53570/jnt.1208633>.

BÖLÜM III

α -Kenmotsu Manifoldlar Üzerinde Ricci Solitonlar

Hakan ÖZTÜRK¹
Emine BEKTAŞ²

Giriş

Hemen hemen değme metrik manifoldların bir sınıfı olan, Kenmotsu manifoldlar ilk olarak Kenmotsu tarafından tanıtılmıştır (Kenmotsu, 1972). Kenmotsu manifoldları Levi-Civita konneksiyonları aracılığıyla karakterize edilebilir. Kenmotsu, tensör denklemleri ile karakterize edilen, katlı çarpımla yakından ilişkili bir yapıdan ibarettir. Yani, her $X, Y \in \chi(M)$ için, aşağıdaki denklemlerle verilebilir:

$$\begin{aligned}\nabla_X \xi &= X - \eta(X)\xi, \\ (\nabla_X \phi)Y &= g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X.\end{aligned}\tag{1}$$

¹ Doç. Dr., Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon Meslek Yüksekokulu, hakser23@gmail.com

² Y. Lisans Öğr., Afyon Kocatepe Üniv., Fen Bil. Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, eminebektasmt@gmail.com

(1) denklemleriyle ifade edilen (ϕ, ξ, η, g) -yapısı normaldir. Kenmotsu yapılar için Killing vektör alanı mevcut olmadığından Kenmotsu yapılar Sasakian yapıda değildirler. Aynı zamanda, bu koşulları sağlayan Kenmotsu manifoldları kompakt bir yapıya sahip değildir. Pek çok farklı yazar Kenmotsu ve hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını çalışmışlardır (De & Pathak, 2004), (Kim & Pak, 2005), (Jun & ark., 2005), (Öztürk 2022, Öztürk & ark., 2017-2021).

Riemann geometrisinde ilgi çekici konulardan biri de Einstein manifoldlarıdır. Bir Riemann manifoldunda, eğer Ricci tensörü metrik ile orantılı ise yani, $S = tg$ olacak şekilde bir t fonksiyonu varsa, o zaman Riemann manifoldu Einstein manifoldu olarak adlandırılır. Bu manifoldlar, uzay-zamanda bir kütle tarafından üretilen yerçekimi etkilerini açıklamaya çalışan Einstein'ın alan denklemleriyle çok bağlantılıdır (Besse, 1987). Poincaré, 20. yüzyılın başlarında her basit bağlantılı, kapalı 3-boyutlu manifoldun S^3 küresine homeomorfik olduğunu iddia etmiştir. Yani, bu iddia ; 3-kürenin her bir ilmeğinin sürekli olarak bir noktaya küçülebildiği tek 3-boyutlu uzay olduğunu ifade etmektedir. Bu varsayım Poincaré hipotezi olarak adlandırılmıştır. Önceleri ispatı kolay olarak düşünülse de ancak bir sonraki yüzyılda ispatlanmıştır. Poincaré'i takiben Thurston, kompakt 3-boyutlu manifoldların tam sınıflandırılmasıyla ilgili olan geometrizasyon varsayımını ortaya atmıştır. Dolayısıyla, artık Poincaré varsayımına da en azından bir cevap verilebilmiş oldu.

Poincaré hipotezini ispatlamak için en büyük adımı Hamilton yaptı. Hamilton meşhur makalesinde Ricci akışını literature kazandırarak büyük bir iş başardı (Hamilton, 1982). Bu çalışmasından sonra yazar yüzeyler üzerinde Ricci akışı incelemiştir (Hamilton, 1988). Ancak Ricci akışı tekillikler oluşturma eğiliminden uzak değildi. Bu durum akışın durmasına sebep oluyordu. Daha sonra Perelman, yeni bir yöntemle akışı tekilliklerden kurtardı (Perelman, 2002). Sonuç olarak, Poincaré hipotezi de çözülmüş oldu.

İşte bu bilgiler ışığında, yeni bir yapı olarak adlandırılan Ricci solitonlar, süreç boyunca Ricci akışından ortaya çıkmıştır. Ricci solitonlar, Ricci akışında tekilliklerin oluşumunu gösterir ve öz benzer çözümler olarak karşımıza çıkar. Literatüre baktığımızda Ricci solitonlarına örnek bulmak için Einstein benzeri yapıya sahip Riemann manifoldlarının araştırıldığını görürüz. Ricci solitonlar özellikle fizikte önemli bir yere sahiptir. Genellikle quasi Einstein şeklinde ifade edilirler.

Bu çalışmada, bazı simetrik tensör ve eğrilik tensör özellikleri yardımıyla α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlar incelenmiştir. Bu çalışmanın son bölümünde, α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde açıklayıcı bir örnek verilmiştir.

Temel Kavramlar

M bir $(2n + 1)$ -boyutlu türevlenebilir bir manifold olsun. Her $X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} \phi^2 X &= -X + \eta(X)\xi, \quad \eta(\xi) = 1, \quad \phi(\xi) = 0, \\ \eta \circ \phi &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

şartlarını sağlayan $(1,1)$ -tipli bir tensör alanı ϕ , bir vektör alanı ξ ve η , 1-formuna sahipse M manifolduna bir hemen hemen değme manifold denir (Blair, 1976).

Eğer bir hemen hemen değme manifoldu

$$g(\phi X, \phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \quad (3)$$

olacak şekilde bir g ile donatılmış ise bu durumda (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik manifold olarak adlandırılır. O halde, (3) denklemi

$$g(\phi X, Y) = -g(X, \phi Y) \quad (4)$$

yardımla

$$\eta(X) = g(X, \xi) \quad (5)$$

ile verilebilir. Bir hemen hemen değme metrik yapı için $g(\xi, \xi) = 1$ olduğu aşıkardır.

Bir hemen hemen değme değme metrik manifoldun temel 2-formu

$$\Phi(X, Y) = g(X, \phi Y) \quad (6)$$

şeklinde tanımlıdır. R Riemann eğrilik tensörü

$$R(X, Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]} \quad (7)$$

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca, Q Ricci operatörü Ricci tensörü yardımıyla

$$S(X, Y) = g(QX, Y) \quad (8)$$

ile tanımlıdır (Yano & Kon, 1984). Bir hemen hemen pseudo metrik (M, ϕ, ξ, η, g) manifoldunun $1 \leq i \leq n$ için her zaman bir özel lokal ortonormal $\{E_i, \phi E_i, \xi\}$ tabanı vardır. Bu tabana bir lokal ϕ -tabanı adı verilir (O'neil, 1983).

$(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold (ϕ, ξ, η) -yapısı ile verilsin. Eğer manifoldu $M \times \mathbb{R}$ şeklinde düşünürsek, her vektör alanı X için, $(X, f \frac{d}{dt})$ yardımıyla $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı belirtebiliriz. Burada t , $\mathbb{R}$ üzerindeki koordinat ve f , $M \times \mathbb{R}$ üzerinde bir türevlenebilir fonksiyondur. Böylece $M \times \mathbb{R}$ üzerinde J hemen hemen kompleks yapısı

$$J\left(X, f \frac{d}{dt}\right) = (\phi X - f\xi, \eta(X) \frac{d}{dt}) \quad (9)$$

şeklinde tanımlanabilir. Eğer J integrallenebilir ise hemen hemen değme metrik (ϕ, ξ, η) -yapısının normal olduğu açıktır. J kompleks yapısının integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart

$$[\phi, \phi](X, Y) + 2d\eta(X, Y)\xi = 0 \quad (10)$$

denkleminin sağlanmasıdır (Yano & Kon, 1984). Bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2(\eta \wedge \Phi) \quad (11)$$

şartlarını sağlayan bir hemen hemen değme metrik manifolddur. Bir normal hemen hemen Kenmotsu manifoldun bir Kenmotsu manifold olduğunu hatırlayalım. (M, ϕ, ξ, η, g) bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere,

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi) \quad (12)$$

şartları sağlanıyorsa, M manifolduna bir hemen hemen α -Kenmotsu manifold denir (Kim & Pak, 2005). Özel olarak, $\alpha = 1$ için, M bir hemen hemen Kenmotsu manifoldudur (Kenmotsu, 1972). Normal hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu da α -Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

Önerme 1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen α -Kenmotsu manifoldu olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$-\phi(\nabla_{\phi X}\phi)Y + (\nabla_X\phi)Y = -2\alpha\eta(Y)\phi X + (g(\alpha\phi X + hX, Y)\xi) \quad (13)$$

önermesi geçerlidir (Öztürk, 2021).

Önerme 2. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen α -Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için, M nin bir α -Kenmotsu manifoldu olması için aşağıda verilen önermenin sağlaması gerek ve yeterdir:

$$(\nabla_X\phi)Y = \alpha[g(\phi X, Y)\xi - \eta(Y)\phi X] \quad (14)$$

(Öztürk, 2020).

Önerme 3. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir hemen hemen α -Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda, aşağıdaki eşitlikler geçerlidir:

$$\nabla_X\xi = -\alpha\phi^2X + h\phi X \quad (15)$$

$$(\nabla_X\eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] + g(hX, \phi Y) \quad (16)$$

(Öztürk, 2021).

Eğrilik Özellikleri

Bu bölümde, α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde temel eğrilik özellikleri incelenmiştir. Bu özellikleri temel sonuçlar bölümünde kullanacağız.

Önerme 4. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla_X \xi = \alpha X - \alpha \eta(X) \xi \quad (17)$$

$$(\nabla_X \eta)Y = \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] \quad (18)$$

$$R(X, Y)\xi = -\alpha^2[\eta(Y)X - \eta(X)Y] \quad (19)$$

$$R(X, \xi)Y = \alpha^2[g(Y, X)\xi - \eta(Y)X] \quad (20)$$

$$R(X, \xi)\xi = \alpha^2 \phi^2 X \quad (21)$$

$$\eta(R(X, Y)Z) = \alpha^2[-\eta(X)g(Y, Z) + \eta(Y)g(X, Z)] \quad (22)$$

$$S(X, \xi) = -2\alpha^2 n \eta(X) \quad (23)$$

$$Q\xi = -2\alpha^2 n \xi \quad (24)$$

$$S(\phi X, \phi Y) = \alpha^2 S(X, Y) + 2\alpha^2 n[-g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)] \quad (25)$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada α sabit reel sayıdır (Öztürk & ark., 2017).

Önerme 5. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\operatorname{div} \eta = -2n\alpha, \operatorname{div} \xi = 2\alpha n, K(\xi, Y) = \alpha^2 \quad (26)$$

Burada $\{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$, M üzerinde bir lokal ϕ -tabanı olarak alınmıştır (Öztürk, 2021).

Tanım 1. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$S(X, Y) = \mu_1 g(X, Y) + \mu_2 \eta(X)\eta(Y) \quad (27)$$

koşulu sağlanıyorsa, M ye bir η -Einstein manifoldu denir, burada μ_1 ve μ_2 , M üzerindeki keyfi fonksiyonlardır. Özel olarak, $\mu_2=0$ alındığında M bir Einstein manifoldu olur (Blair, 1976).

Önerme 6. M , $(2n + 1)$ -boyutlu bir η -Einstein α -Kenmotsu manifold olmak üzere, $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\mu_1 + \mu_2 = -2n\alpha^2 \quad (28)$$

$$r = \mu_1(2n + 1) + \mu_2 \quad (29)$$

$$\mu_1 = \frac{r+2n\alpha^2}{(2n+1)-1} \quad (30)$$

$$\mu_2 = \left[\frac{2n(\alpha^2+r)+r}{(2n+1)-1} \right] \quad (31)$$

eşitlikleri sağlanır. Burada r , M nin skalar eğriliğidir.

İspat. (23) ve (27) eşitlikleri $Y = \xi$ için birlikte ele alınırsa,

$$S(X, \xi) = \mu_1\eta(X) + \mu_2\eta(X) = -2\alpha^2n\eta(X)$$

denklemini gereğince

$$\mu_1 + \mu_2 = -2\alpha^2n$$

bulunur. Bu son eşitlik yardımıyla (28) eşitliğine ulaşılır. Bundan başka, (27) eşitliğinde $E_i = \{e_1, \dots, e_n, \phi e_1, \dots, \phi e_n, \xi\}$, M üzerinde bir lokal ϕ -tabanı için, $X = Y = E_i$ alınır ve i indeksi üzerinden kontraksiyon yapılırsa

$$r = \mu_1(2n + 1) + \mu_2$$

eşitliği yardımıyla (29) elde edilir.

Bunlara ilaveten, (28) ve (29) eşitlikleri yardımıyla

$$\mu_1 - (2n + 1)\mu_1 = -2n\alpha^2 - r$$

ve

$$-\mu^2((2n+1)) = 2n\alpha^2 + r + 2nr$$

yazılır. Yukarıdaki eşitlikler sırasıyla düzenlenirse, (30) ve (31) eşitliklerinin ispatları açıktır.

Ricci Solitonlar

Bu bölümde, α -Kenmotsu manifoldları üzerinde Ricci soliton kavramını inceleyeceğiz.

Tanım 2. (M, g_0) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Aşağıda verilen kısmi türevli diferensiyel denkleme g metrik tensörünü değiştiren Ricci akışı adı verilir:

$$\partial/\partial s(g(s)) + 2S(g(s)) = 0, \quad (32)$$

$$g(0) = g_0$$

(Hamilton, 1982).

Tanım 3. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. Eğer M üzerinde keyfi vektör alanları X, Y ve V için, λ gerçel bir skaler olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (33)$$

denklemini sağlanıyorsa, (M, g) ye Ricci soliton denir. Burada V vektör alanı da Ricci solitonun potansiyel vektör alanı ve $L_V g$ de V yönündeki g metriğinin Lie türevidir. Bu durumda, Ricci soliton (M, g, V, λ) ile sembolize edilir. (M, g, V, λ) Ricci solitonuna λ nın $\lambda < 0, \lambda = 0$ ve $\lambda > 0$ durumları için, sırasıyla, daralan, değişmeyen ve genişleyen Ricci soliton adı verilir (Hamilton, 1988).

Tanım 4. (M, g) bir n -boyutlu Riemann manifoldu olsun. $L_V g$, V yönündeki g metriğinin Lie türevi olmak üzere,

$$(L_V g)(X, Y) = g(\nabla_X V, Y) + g(X, \nabla_Y V) \quad (34)$$

dır (Yano ve Kon, 1984).

Tanım 5. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olsun. Eğer M üzerinde (g, V, λ) Ricci solitonu mevcutsa,

(M, g, V, λ) ya Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifold denir (Hamilton, 1988, Kenmotsu, 1972).

Önerme 6. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifold olsun. Eger V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, Ricci eğrilik tensör alanı

$$S(X, Y) = -(\alpha + \lambda)g(X, Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \quad (35)$$

denklemini sağlar.

İspat. Hipoteze göre (M, g, V, λ) Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifold olmak üzere, (34) denkleminde $V = \xi$ alınırsa

$$(L_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) \quad (36)$$

bulunur. (36) eşitliği (33) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X) + 2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (37)$$

elde edilir. Ayrıca, (17) ve (37) eşitlikleri birlikte hesaba katılırsa

$$2S(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) - \alpha[g(\varphi^2 X, Y) + g(\varphi^2 Y, X)] = 0 \quad (38)$$

yazılır. (2) eşitliği yardımıyla (38) eşitliği düzenlenirse

$$S(X, Y) + \lambda g(X, Y) + \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] = 0 \quad (39)$$

denklemine ulaşılır. Böylece (39) eşitliği göz önüne alındığında (35) eşitliğinin ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 7. (M, g, V, λ) , $(2n + 1)$ -boyutlu bir Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifold olsun. Eger V potansiyel vektör alanı ξ karakteristik vektör alanı olarak seçilirse yani, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu için, aşağıdaki önermeler geçerlidir:

$$S(X, \xi) = -\lambda\eta(X) \quad (40)$$

$$QX = \eta(X)\xi - (1 + \lambda)X \quad (41)$$

$$Q\xi = -\lambda\xi, \quad (42)$$

$$S(\xi, \xi) = -\lambda \quad (43)$$

$$r = \alpha - (2n + 1)(\alpha + \lambda). \quad (44)$$

İspat. (35) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$S(X, \xi) = -(\alpha + \lambda)g(X, \xi) + \alpha\eta(X)\eta(\xi) \quad (45)$$

yazılır. Yani, (45) eşitliğinden

$$\begin{aligned} S(X, \xi) &= -(\alpha + \lambda)\eta(X) + \alpha\eta(X) \\ &= -\alpha\eta(X) + \alpha\eta(X) - \lambda\eta(X) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da (40) eşitliğinin doğruluğunu gösterir.

(8) eşitliğinde verilen Ricci operatörü ile (35) eşitliği kullanılarak

$$S(X, Y) = g(QX, Y) = -(\alpha + \lambda)g(X, Y) + \alpha\eta(X)\eta(Y) \quad (46)$$

bulunur. (46) eşitliğinde Ricci operatörü çekilirse (41) eşitliğine ulaşılır.

(42) ve (43) eşitliklerinin ispatı (41) eşitliğinin kullanılmasıyla açıktır. Son olarak, (35) eşitliğinde $1 \leq i \leq 2n + 1$ için, $X = Y = E_i$ ye göre kontraksiyon uygulanırsa ispat aşıkardır.

Temel Sonuçlar

Bu bölümde, bazı simetrik tensör alanları yardımıyla α - Kenmotsu manifoldları üzerinde Ricci solitonlarla ilgili sonuçlar verilmiştir.

Teorem 1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olsun. Eğer M üzerinde ikinci mertebeden simetrik bir paralel kovaryant tensör alanı mevcutsa, o zaman bu tensör alanı ile metrik tensör lineer bağımlıdır.

İspat. Hipotez gereğince $(0,2)$ -tipli bir tensör alanı h olsun. Bu tensör alanı Levi-Civita anlamında paralel ise

$$\nabla h = 0 \quad (47)$$

dır. Bu durumda,

$$\nabla^2 h(U, V; Z, Y) - \nabla^2 h(U, V; Y, Z) = 0 \quad (48)$$

yazılır. (48) eşitliği göz önüne alınarak

$$h(Z, R(U, V)Y) + h(R(U, V)Z, Y) = 0 \quad (49)$$

elde edilir. (49) eşitliğinde $Y = Z$ yerine ξ alınırsa,

$$-\alpha^2[\eta(V)h(U, \xi) - \eta(U)h(V, \xi)] = 0 \quad (50)$$

bulunur. Burada $\alpha \neq 0$ olup, (50) eşitliğinde $U = \xi$ seçilirse

$$-\alpha^2[\eta(V)h(\xi, \xi) - h(V, \xi)] = 0 \quad (51)$$

olur. (51) eşitliğinin düzenlenmesiyle

$$h(V, \xi) = h(\xi, \xi)\eta(V) \quad (52)$$

dır. (52) eşitliğinin her iki tarafının U vektör alanına göre kovaryant türevi alınırsa

$$\begin{aligned} h(\nabla_U V, \xi) + h(V, \nabla_U \xi) + (\nabla_U h)(V, \xi) \\ = \eta(\nabla_U V)h(\xi, \xi) + \eta(V)(\nabla_U h)(\xi, \xi) + 2\eta(V)h(\nabla_U \xi, \xi) \\ + (\nabla_U \eta)(V)h(\xi, \xi) \end{aligned} \quad (53)$$

yazılır.

(47) ve (52) eşitliklerinin kullanılmasıyla (53) eşitliği

$$h(U, V) = h(\xi, \xi)g(U, V)$$

haline indirgenir. Bu son eşitlikte $h(\xi, \xi)$ değerinin sabit olduğu (52) eşitliğinden dolayı aşıkardır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olsun. Eğer M üzerinde keyfî vektör alanları için, $(L_V g)(X, Y) + 2S(X, Y)$ tensör alanı paralel ise o zaman (M, g, V, λ) bir Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifoldu olur. Burada λ reel sabit olmak üzere, $h(\xi, \xi) = -2\lambda$ dır.

İspat. M üzerinde bir Ricci soliton (33) denklemiyle tanımlıdır. Teorem 1 yardımıyla bir α -Kenmotsu manifoldu üzerinde bir simetrik paralel $(0,2)$ -tipli metrik tensör alanının g metrik tensörüyle

lineer bağımlı olduğunu biliyoruz. Hipotezden dolayı $(L_V g + 2S)$ paralel olacağından

$$(L_V g)(Y, Z) + 2S(Y, Z) = h(\xi, \xi)g(Y, Z) = 0 \quad (54)$$

yazılabilir. Burada $h(\xi, \xi)$ sıfırdan farklı bir sabittir. Bu nedenle, (54) eşitliğinde $(1/2)h(\xi, \xi) = -\lambda$ alınarak (33) eşitliğine ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olsun. Eğer M üzerinde g metriği $V = \xi$ için bir Ricci solitona sahipse, o zaman M bir η -Einstein α -Kenmotsu manifolddudur.

İspat. (M, g, ξ, λ) Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifold olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$(L_\xi g)(X, Y) = g(\nabla_X \xi, Y) + g(\nabla_Y \xi, X)$$

olmak üzere, Önerme 6 göz önüne alınırsa,

$$S(X, Y) = -\lambda g(X, Y) - \alpha[g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)] = 0$$

yazılır. Ayrıca, (28) eşitliğinden

$$\mu_1 = -(\lambda + \alpha), \mu_2 = \alpha$$

seçilirse (M, g, ξ, λ) Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifoldu bir η -Einstein yapıya sahip olacaktır. Böylece ispat sona erer.

Teorem 4. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olsun. O halde, $n \geq 1$ olmak üzere, M üzerindeki (g, ξ, λ) Ricci solitonu değişmeyen ve genişleyen durumda olamaz, daima daralan durumdadır.

İspat. Bir V vektör alanı ya $V \perp \xi$ ya da $V \in Sp\{\xi\}$ önermelerini sağlayacaktır. Burada birinci durum uygulamada kompleks analiz tarafından kullanılmaktadır. Yani, üzerinde bulunduğumuz yapı gereği $V = \xi$ önermesini dikkate almalıyız. O halde, $V = \xi$ için,

$$(L_{\xi}g)(\xi, \xi) = 0 \quad (55)$$

ve

$$h(\xi, \xi) = -2\lambda \quad (56)$$

olup, burada

$$h(\xi, \xi) = (L_{\xi}g)(\xi, \xi) + 2S(\xi, \xi) \quad (57)$$

dır. (43) ve (55) eşitlikleri hesaba katılırsa, (57) eşitliği

$$h(\xi, \xi) = 4n\alpha^2 \quad (58)$$

formuna indirgenir. (56)-(58) eşitlikleri yardımıyla

$$\lambda = -2n\alpha^2 \quad (59)$$

elde edilir. Burada $\alpha \neq 0, n \geq 1$ ve $\alpha^2 > 0$ olduğundan λ asla sıfır veya negatif olamaz. Fakat daima $\lambda < 0$ olur. Dolayısıyla M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu daralandır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n + 1)$ -boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olsun. Eğer $n \geq 1$ için, M bir η -Einstein yapıya sahipse, o zaman değişen skalar eğrilikle verilen (g, ξ, λ) Ricci solitonu daima genişleyen durumdadır.

İspat. M nin bir α -Kenmotsu manifold olduğunu varsayalım. (27), (30) ve (31) eşitlikleri yardımıyla $\mu_1, \mu_2: M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları mevcuttur. Bu durumda, M nin bir η -Einstein α -Kenmotsu manifoldu olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi, M üzerinde Ricci soliton yapısının bir skalar eğrilige sahip olduğunu gösterelim. M üzerinde bir simetrik paralel kovaryant tensör alanı $h(X, Y)$ olmak üzere, $V = \xi$ için,

$$h(X, Y) = (L_{\xi}g)(X, Y) + 2S(X, Y) \quad (60)$$

ile verilebilir. (27), (30) ve (31) eşitliklerinin kullanılmasıyla (60) eşitliği

$$h(X, Y) = 2[(r/(2n)) + \alpha(\alpha + 1)]g(X, Y) \quad (61)$$

$$-2[(r/(2n)) + \alpha(1 + (2n + 1)\alpha)]\eta(X)\eta(Y)$$

formunu alır. (61) eşitliğinin her iki tarafının W vektör alanına göre kovaryant türevi alınır, $W = \xi$ ve $X, Y \in \{Sp\}^\perp$ olarak seçilirse, $\nabla h = 0$ olmak üzere,

$$\nabla_\xi r + 2n\nabla_\xi(\alpha^2 + \alpha) = 0 \quad (62)$$

elde edilir. (62) eşitliğinin her iki tarafının ξ ye göre integrali alınırsa,

$$r = -2n(\alpha^2 + \alpha) + d \quad (63)$$

sonucuna ulaşılır. Burada d bir integral sabitidir. Dolayısıyla M üzerinde skalar eğriliğe sahip Ricci solitonlar mevcuttur. Son olarak, (g, ξ, λ) Ricci solitonunu inceleyelim. (33) eşitliği yardımıyla

$$h(X, Y) + 2\lambda g(X, Y) = 0 \quad (64)$$

yazılır. Bu son eşitlikte X ve Y yerine ξ alırsak,

$$h(\xi, \xi) + 2\lambda = 0 \quad (65)$$

dır. Ayrıca, (61) eşitliğinde de $X = Y = \xi$ seçilirse

$$h(\xi, \xi) + 4n\alpha^2 = 0 \quad (66)$$

bulunur. (65) ve (66) eşitlikleri birlikte düşünülürse

$$\lambda = 2n\alpha^2 \quad (67)$$

elde edilir. Burada hipotezlerimiz uyarınca (67) eşitliğinden λ daima pozitif olur. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 6. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olsun. Eğer M bir η -Einstein yapıya sahipse, M üzerinde değişen skalar eğrilikle verilen (g, ξ, λ) Ricci solitonu daima genişleyen durumdadır.

İspat. M nin 3-boyutlu bir α -Kenmotsu manifold olduğunu kabul edelim. O halde,

$$R(X, Y)Z = -g(X, Z)QY + g(Y, Z)QX + S(Y, Z)X - S(X, Z)Y \\ + (r/2)[g(X, Z)Y - g(Y, Z)X] \quad (68)$$

(De ve Pathak 2004). (68) eşitliğinde Z yerine ξ alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\eta(Y)QX - \eta(X)QY + (2\alpha^2 + (r/2))[\eta(X)Y - \eta(Y)X] = \\ \alpha^2[\eta(X)Y - \eta(Y)X] \quad (69)$$

bulunur. Tekrardan (69) eşitliğinde Y yerine ξ alınırsa,

$$QX = ((r/2) + \alpha^2)X - ((r/2) + 3\alpha^2)\eta(X)\xi \quad (70)$$

dır. (70) eşitliğinin her iki tarafının W vektör alanına göre iç çarpımı alınır,

$$S(X, W) = ((r/2) + \alpha^2)g(X, W) - ((r/2) + 3\alpha^2)\eta(X)\eta(W) \quad (71)$$

yazılır. Bu durumda, 3-boyutlu α -Kenmotsu manifoldu η -Einstein yapıdadır.

Şimdi, Teorem 5 de uygulanan metodoloji yardımıyla Ricci soliton yapısının değişen bir skalar eğriliğe sahip olduğunu ispatlayalım. Bunun için,

$$h(X, W) = 2[(r/2) + \alpha^2 + \alpha]g(X, W) - 2[(r/2) + 3\alpha^2 + \alpha]\eta(X)\eta(W) \quad (72)$$

eşitliğinin Y vektör alanı yönündeki kovaryant türevi $Y = \xi$ ve $\nabla h = 0$ için,

$$\nabla_\xi r + 2\nabla_\xi(\alpha^2 + \alpha) = 0 \quad (73)$$

bulunur. (73) eşitliğinin her iki tarafı ξ ye göre integre edilirse, bu takdirde

$$r = -2\alpha(\alpha + 1) + d$$

elde edilir. O halde 3-boyutlu α -Kenmotsu manifoldu üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonunun değişen skalar eğriliğe sahip olduğunu gösterdik. Son olarak, 3-boyutlu α -Kenmotsu manifoldu üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonunu araştıralım. (33) ve (61) eşitlerinde $X = Y = \xi$ alınırsa,

$$h(\xi, \xi) + 2\lambda = 0, h(\xi, \xi) + 4\alpha^2 = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikler kullanılırsa $\lambda = 2\alpha^2$ sonucuna ulaşılır. Böylece $\alpha \neq 0$ ve $\alpha^2 > 0$ ($n = 1$) olduğundan λ değeri daima pozitiftir. Bundan dolayı, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonu her zaman genişleyendir. Bu da ispatı sonlandırır.

Örnek 1. 3-boyutlu bir M manifoldunu $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ şeklinde alalım. Burada (x, y, z) , $\mathbb{R}^3$ uzayındaki standart koordinatlardır. M de vektör alanlarını

$$E_1 = \mu_2 e^{-\alpha z} (\partial/\partial x) + \mu_1 e^{-\alpha z} (\partial/\partial y)$$

$$E_2 = -\mu_1 e^{-\alpha z} (\partial/\partial x) + \mu_2 e^{-\alpha z} (\partial/\partial y)$$

$$E_3 = (\partial/\partial z)$$

biçiminde seçelim. Bundan sonraki hesaplamalarda kısalık için t_1 ve t_2 fonksiyonlarını

$$t_1(z) = \mu_2 e^{-\alpha z}, \quad t_2(z) = \mu_1 e^{-\alpha z}$$

alalım. Burada μ_1, μ_2 ve α sabitleri için, $\mu_1^2 + \mu_2^2$ ve α sıfırdan farklıdır. M nin her bir noktasında $\{E_1, E_2, E_3\}$ kümesinin lineer bağımsız olduğu açıktır. Ayrıca, M üzerinde g Riemann metrik tensör çarpımı

$$g = (t_1^2 + t_2^2)^{-1} (dx \otimes dx + dy \otimes dy) + dz \otimes dz.$$

ile tanımlansın. M üzerinde keyfi vektör alanı X olmak üzere, η 1-formu

$$g(X, E_3) = \eta(X)$$

ve (1,1)-tipli tensör alanı φ

$$\varphi(E_1) = E_2, \varphi(E_2) = -E_1, \varphi(E_3) = 0$$

şeklinde tanımlı olsunlar. Bundan başka,

$$[E_1, E_3] = \alpha E_1, [E_2, E_3] = \alpha E_2, [E_1, E_2] = 0$$

ve

$$\nabla_{E_1} E_1 = -\alpha E_3, \nabla_{E_2} E_1 = -E_3, \nabla_{E_3} E_1 = 0$$

$$\nabla_{E_1} E_2 = -E_3, \nabla_{E_2} E_2 = -\alpha E_3, \nabla_{E_3} E_2 = 0$$

$$\nabla_{E_1} E_3 = \alpha E_1, \nabla_{E_2} E_3 = \alpha E_2, \nabla_{E_3} E_3 = 0$$

elde edilir. O halde, yapıyı kontrol etmek için M nin temel 2-formu Φ nin sıfırdan farklı bileşenlerini incelemek yeterli olacaktır:

$$\Phi(\partial/\partial x, \partial/\partial y) = -(t_1^2 + t_2^2)^{-1} = -(\mu_1^2 + \mu_2^2)^{-1} e^{2\alpha z}.$$

$\eta = dz$ olduğundan yukarıdaki eşitlik M üzerinde $d\Phi = 2\alpha(\eta \wedge \Phi)$ denklemini gerektirir. Böylece kurduğumuz $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen α -Kenmotsu yapısıdır. Burada φ tensör alanının Nijenhuis tensörü özdeş olarak sıfırdır. Başka bir ifadeyle, M bir α -Kenmotsu manifoldudur.

Riemann eğrilik tensörü R nin kullanılmasıyla, R nin sıfırdan farklı bileşenleri aşağıda verilmiştir:

$$R(E_1, E_2)E_1 = \alpha(\alpha E_2 - E_1), R(E_1, E_3)E_2 = \alpha E_3, R(E_1, E_2)E_2 = \alpha(E_2 - \alpha E_1)$$

$$R(E_1, E_3)E_1 = \alpha^2 E_3, R(E_1, E_3)E_3 = -\alpha^2 E_1, R(E_2, E_3)E_1 = \alpha E_3$$

$$R(E_2, E_3)E_3 = -\alpha^2 E_2, R(E_2, E_3)E_2 = \alpha^2 E_3, R(E_3, E_2)E_1 = -\alpha E_3$$

Ricci tensörü tanımı gereğince, $1 \leq i, j \leq 3$ için,

$$S_{ij} = S(E_i, E_j)$$

olduğundan sadece $i = j$ durumunda $S_{ii} = -2\alpha^2$ dır. Aksi halde, $i \neq j$ durumunda ise $S_{ij} = 0$ dır. Yani,

$$S(E_1, E_1) = g(R(E_1, E_3)E_3, E_1) + g(R(E_1, E_2)E_2, E_1) = -2\alpha^2$$

ve

$$S(E_3, E_3) = S(E_2, E_2) = -2\alpha^2$$

dır. Ayrıca, M nin skalar eğriliği de

$$r = S(E_1, E_1) + S(E_2, E_2) + (E_3, E_3) = -6\alpha^2$$

olur. Şimdi, M üzerinde (g, ξ, λ) Ricci solitonunu göz önüne alalım. $X = Y = E_j$ ve $1 \leq j \leq 3$ için,

$$(L_\xi g)(E_1, E_1) = g(\nabla_{E_1} \xi, E_1) + g(\nabla_{E_1} \xi, E_1)$$

$$(L_\xi g)(E_1, E_1) = 2\alpha[g(E_1, E_1) - \eta(E_1)\eta(E_1)] = 2$$

$$(L_\xi g)(E_2, E_2) = 2\alpha[g(E_2, E_2) - \eta(E_2)\eta(E_2)] = 2\alpha$$

$$(L_\xi g)(E_3, E_3) = 2\alpha[g(E_3, E_3) - \eta(E_3)\eta(E_3)] = 0$$

dır. Bu nedenle, (33) eşitliği yardımıyla $j = 1$ için,

$$(L_\xi g)(E_1, E_1) + 2S(E_1, E_1) + 2\lambda g(E_1, E_1) = 0$$

denklemine ulaşılır. Buradan yukarıdaki denklem düzenlenirse

$$\lambda = \alpha(2\alpha - 1)$$

elde edilir. Benzer olarak, $j = 2$ için,

$$(L_\xi g)(E_2, E_2) + 2S(E_2, E_2) + 2\lambda g(E_2, E_2) = 0$$

eşitliği kullanılarak yukarıda bulunan λ değerine ulaşılır. Son olarak, $j = 3$ için,

$$(L_\xi g)(E_3, E_3) + 2S(E_3, E_3) + 2\lambda g(E_3, E_3) = 0$$

yardımla

$$\lambda = 2\alpha^2$$

bulunur. Burada $\alpha^2 \neq 0$ ve $\alpha^2 > 0$ olduğundan α nın pozitif ve negatif değerleri için λ daima pozitiftir. Böylece (M, g, ξ, λ) Ricci solitonu genişleyen durumundadır.

Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada, Ricci solitonlu α -Kenmotsu manifoldlarla ilgili bazı sonuçlar elde edilmiştir. Burada yapılan hesaplamalarda α sıfırdan farklı bir reel sayıdır. Bulunan yeni sonuçlar literatürde daha önce bulunan sonuçları da kapsayan daha genel ve sınıflayıcı niteliktedir. Gelecek çalışmalarımız; (κ, μ, ν) -uzayları, D -homotetik deformasyon ve bazı paralel tensör alanları yardımıyla hemen hemen α -Kenmotsu manifoldlar üzerinde Ricci solitonlarla ilgili daha genel sonuçlar bulmaya adanacaktır.

KAYNAKÇA

- Besse A L, (1987). *Einstein manifolds*. Springer Science and Business Media., New York.
- Blair, D. E. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*. Lecture Notes in Math., Vol. 509, New York: Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg.
- De, U. C. & Pathak, G. (2004). On 3-dimensional Kenmotsu manifolds. *Ind. J. Pure Applied Math.*, 35, 159-165.
- Hamilton R S, (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *Journal of Differential Geometry*, 17(2), 255-306. Doi: 10.4310/jdg/1214436922
- Hamilton R S, (1988). The Ricci flow on surfaces, Mathematics and General Relativity (Santa Cruz, CA, 1986), *Contemp. Math*, 71, 301-307.
- Hong, S. & Özgür, C. & Tripathi, M. M. (2006). On some special classes of Kenmotsu manifolds. *Kuwait J. Sci. Eng.*, 33, 19-32.
- Jun, J. B. & De, U. C. & Pathak, G. (2005). On Kenmotsu manifolds. *J. Korean Math. Soc.*, 42, 435-445. Doi: <https://doi.org/10.4134/JKMS.2005.42.3.435>
- Kenmotsu, K. (1972). A class of contact Riemannian manifold. *Tohoku Math. J.*, 24, 93-103. Doi: 10.2748/tmj/1178241594
- Kim, T. W. & Pak, H. K. (2005). Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures. *Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug.*, 21, 841-846. Doi: <https://doi.org/10.1007/s10114-004-0520-2>
- Naik, D. M. & Venkatesha, V. & Kumara, H. A. (2020). Some results on almost Kenmotsu manifolds, *Note di Matematica.*, 40 (1), 87-100. Doi: 10.1285/i15900932v40n1p87

- O'Neil, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*. Academic Press, New York.
- Öztürk, S. & Öztürk, H. (2020). On α -Kenmotsu Pseudo Metric Manifolds, *AKU Journal of Science and Eng.*, 20, 975-982. Doi: 10.35414/akufemubid.803483
- Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Almost α -cosymplectic pseudo metric manifolds. *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 4106025, 10 pages. Doi: <https://doi.org/10.1155/2021/4106025>
- Öztürk, S. & Öztürk, H. (2021). Certain class of almost α -cosymplectic manifolds, *Journal of Mathematics*, 2021, Article ID 9277175, 9 pages. Doi: <https://doi.org/10.1155/2021/9277175>
- Öztürk H., Öztürk S., (2021). Certain Results for α -Cosymplectic Manifolds, *Fen ve Matematik Bilimleri, Teori, Güncel Araştırmalar ve Yeni Eğilimler*, Bölüm V, 63-77, İvpe Yayınları, Montenegro.
- Öztürk H., Mısırlı M., Öztürk S., (2017). Almost α -Cosymplectic Manifolds with η -Parallel Tensor Fields, *Academic Journal of Science*, 7(3), 605-612.
- Öztürk H., Öztürk S., (2018). Some Results on D -Homothetic Deformation, *AKU Journal of Science and Eng.*, 18, 878-883. Doi: 10.5578/fmbd.67760
- Öztürk H., Öztürk S., (2018). On Almost Alpha Kenmotsu (k, μ) -Spaces, *Journal of Advances in Mathematics*, 14(2), 7905-7911. Doi: <https://doi.org/10.24297/jam.v14i2.7662>
- Öztürk S., (2022). A Study on α -Kenmotsu Manifolds, *Science and Mathematics Sciences, Theory, Current Researches and New Trends* 5, Chapter V, 45-58, İvpe, Montenegro.

- Perelman G, (2002). The Entropy Formula for the Ricci Flow and its Geometric Applications, *arXiv preprint math/0211159*.
- Kumar R, Mourya A, (2018). Certain Results on Ricci Solitons in α -Kenmotsu Manifolds, *Science Vision*, 18, 11-15.
- Yano, K. & Kon, M. (1984). *Structures on manifolds*. Series in Pure Math., Vol. 3, Singapore: World Scientific Publishing Co.

BÖLÜM IV

Gruplar Üzerinde Çaprazlanmış Modüller Ve Kompleksler

Hatice TAŞBOZAN¹

Giriş

Çaprazlanmış modüller, grup teorisi fikrini genişleterek gruplar arasındaki etkileşimi daha karmaşık bir şekilde inceleme imkanı sunan matematiksel yapılardır. Bunlar, bir grubun bir küme üzerine etki etmek yerine, birbirleriyle belirli bir şekilde etkileşen iki grubun doğal genelleştirmesidir.

Özünde, bir çaprazlanmış modül, bir grup üzerinde nasıl etki ettiğini yakalayan bir homomorfizm ile birbirine bağlı iki grup içerir. Bu kavram, sadece saf matematikte değil, aynı zamanda topoloji, cebirsel geometri ve teorik fizik gibi çeşitli alanlarda da uygulama

¹ Dr. Öğr. Üyesi, Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, htasbozan@mku.edu.tr

bulur. Farklı bağlamlarda simetrileri ve dönüşümleri anlama açısından güçlü bir çerçeve sunar ve cebirsel yapılar arasındaki etkileşimi gösterir.

Temelde, bir çaprazlanmış modül, geleneksel olarak G ve H olarak gösterilen iki grup ile $\partial: H \rightarrow G$ ve $\bullet: G \times H \rightarrow H$ olarak adlandırılan iki grup homomorfizmasını içerir. Bu homomorfizmalar, gruplar arasındaki ilişkiyi yakalayan belirli aksiyomları sağlar.

İlk homomorfizm $\partial: H \rightarrow G$, sınır dönüşümü olarak bilinir. H elemanlarını G içine dönüştürür ve H grubunun G üzerinde "nasıl dönüştürüldüğünü" ifade eder, aslında eşlenik etki yoluyla H grubunun G üzerindeki elemanları nasıl etkilediğini gösterir. Bu eylem, iki grup arasındaki 'bükülme' veya 'etkileşim' türünü açıklar.

İkinci homomorfizm, $\bullet: G \times H \rightarrow H$ olarak gösterilen $\bullet$ ise etki veya çapraz işlem olarak adlandırılır. Bu işlem, G grubunun H üzerindeki etkisini ifade eder ve G elemanlarının H elemanlarını grup etkisi ile nasıl etkilediğini belirtir. Bu etki, G grubunun H üzerindeki işlemleri ile H grubunun G üzerindeki eylemleri arasındaki uyumluluk koşulları yoluyla ilişkilendirilir.

Bu homomorfizmaların ve etkileşimlerinin sağladığı aksiyomlar, grup etkileşimlerini ve simetrilerini çeşitli matematiksel bağlamlarda incelemek için zengin bir yapı sunar.

Çaprazlanmış modüller, özellikle homotopi gruplarını, kaplama uzaylarını ve daha yüksek boyutlu cebirsel yapıları anlama konusunda, özellikle de cebirsel topolojide, uygulamalar sunar. Ayrıca, özellikle kalibre teorisi ve fiziksel sistemlerdeki simetrilerin çalışılması gibi teorik fizikle bağlantıları vardır.

Çaprazlanmış Modül

Bir çaprazlanmış modül (Whitehead, 1949), G, H birer grup, $g \in G$ ve $h, h' \in H$ olmak üzere $\partial: G \rightarrow H$ dönüşümü

- i) $\partial(g^h) = h\partial(g)h^{-1},$
- ii) $g'^{\partial(g)} = gg'g^{-1}.$

şartlarını sağlamaktadır.

Bu dönüşümde $\bullet: G \times H \rightarrow H; \bullet(g, h) = g^h$ ile G grubunun H grubuna etkisi ifade edilmektedir.

$\partial: G \rightarrow H$ ve $\partial': G' \rightarrow H'$ iki çaprazlanmış modül olsun. Bu çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$\gamma = (\alpha, \beta)$ olmak üzere iki çaprazlanmış modülün arasındaki morfizm

- i) $\partial'\alpha = \beta\partial$
- ii) $\alpha(g^h) = \alpha(g)^{\beta(h)}$

şartlarını sağlar.

Yukarıda verilen çaprazlanmış modül objesi ve morfizm tanımı yardımıyla **Xmod** kategorisi elde edilir.

Literatürde, çeşitli araştırmalarda çaprazlanmış modüller ve kategorik özelliklere odaklanan pek çok çalışma bulunmaktadır. Ayrıca, çaprazlanmış modüllerin bilgisayar uygulamalarına dair örnekler, Alp ve Wensley'in (Alp & Wensley, 2003), Odabaş ve Soylu'nun (Odabaş & Soylu, 2019), ve (Yılmaz & ark., 2022b) çalışmalarında sunulmuştur.

Çaprazlanmış modüller kategorisi ile ilgili daha detaylı bir bilgiye ulaşmak için internal kategoriler ile olan ilişkilerine Porter'ın (Porter, 1980) ve (Porter, 1982) detaylı incelemelerine, Yılmaz ve Arslan'ın (2022) araştırmasındaki bulgulara ve ayrıca Arslan ve Yılmaz'ın (Yılmaz & Arslan, 2022), (Arslan & Yılmaz, 2022) çalışmalarındaki analizlere dikkat edilebilir. Bu çalışmalar, internal kategorilerin çeşitli yönlerini ve etkileşimlerini ayrıntılı bir şekilde ele almaktadır, dolayısıyla çaprazlanmış modüller ile ilgili geniş bir perspektif sunmaktadır.

İki - Çaprazlanmış Modül

Bir 2- çaprazlanmış modül (Ellis, 1984)

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

N grubunun L, M gruplarına etkisinden oluşan bir grup kompleksidir. Bu kompleks ile birlikte

$$\{-, -\}: M \times M \rightarrow L$$

olarak bilinen Peiffer dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar:

- i. $\partial_2\{m_1, m_2\} = m_2^{\partial_1(m_1)}(m_1 m_2^{-1} m_1^{-1})$
- ii. $\{\partial_2(l_1), \partial_2(l_2)\} = [l_2, l_1]$
- iii. $\{m_1 m_2, m_3\} = \{m_2, m_3\}^{\partial_1(m_1)}\{m_1, m_2 m_3 m_2^{-1}\}$
- iv. $\{m_1, m_2 m_3\} = \{m_1, m_2\}^{m_1 m_2(m_1)^{-1}}\{m_1, m_3\}$
- v. $\{m_1, \partial_2(l_1)\}\{\partial_2(l_1), m_1\} = l_1^{\partial_1(m_1)} l_1^{-1}$
- vi. $\{m_1, m_2\}^n = \{m_1^n, m_2^n\}$

$(L, M, N, \partial_1, \partial_2, \{-, -\})$ ile bir 2- çaprazlanmış modül ifade edilir.

$(L, M, N, \partial_1, \partial_2, \{-, -\})$, $(L', M', N', \partial'_1, \partial'_2, \{-, -\}')$ ile tanımlanan iki 2- çaprazlanmış modül olsun. Bu 2- çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm şu şekilde tanımlanır.

$\delta = (\alpha, \beta, \gamma): (L, M, N) \rightarrow (L', M', N')$ bir 2- çaprazlanmış modül morfizmi olabilmesi için,

$$\begin{array}{ccccccc}
 M \times M & \xrightarrow{\{-, -\}} & L & \xrightarrow{\partial_2} & M & \xrightarrow{\partial_1} & N \\
 \downarrow \beta \times \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\
 M' \times M' & \xrightarrow{\{-, -\}'} & L' & \xrightarrow{\partial'_2} & M' & \xrightarrow{\partial'_1} & N'
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli ve $m \in M, n \in n$ ve $m \in M$ olmak üzere

$$\beta(m^n) = \beta(m)^{r(n)}$$

$$\alpha(l^n) = \alpha(l)^{r(n)}$$

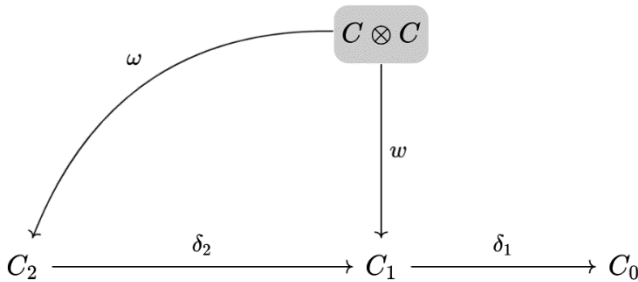
eşitliklerini sağlamalıdır.

Yukarıda verilen 2- çaprazlanmış modül objesi ve aralarında tanımlanan morfizmi yardımıyla 2- çaprazlanmış modül kategorisi elde edilir. **X₂Mod** şeklinde ifade edilir.

Conduche (Conduche,1984), homotopi 3-türlerinin cebirsel bir modeli olarak grupların 2-çaprazlanmış modüllerinin kavramını tanıttı. 2-çaprazlanmış modüllerin cebirsel adaptasyonu (Grandjean ve Vale) tarafından verilmiştir. 2-çaprazlanmış modüllerin tamlık özelliğine sahip olduğu ve geri çekme objeye sahip olduğu (Yılmaz, 2017) alışmasında eşitleyici, sonlu çarpım zellikleri (Soylu Yılmaz, 2022a) alışmasında, geri çekme obje kullanılarak üzerinde bir topoloji kurulabileceği (Ulualan & Yılmaz, 2019) alışmasında gösterilmiştir. 2-çaprazlanmış modüllere ilpotentlik şartalara ekleyerek Baues (Baues, 1991) kuadratik modülleri tanımlamıştır.

Kuadratik Modül

Grup homomorfizmlerinin diyagramı



QM1. $\delta_1: C_1 \rightarrow C_0$, bir nil(2)-modülüdür.

QM2. δ_2 ve δ_1 dönüşümleri için $\delta_2 \delta_1 = 1$ ve her $a, b \in C_1$ için

$$\delta_2 \omega(\{a\} \otimes \{b\}) = w(\{a\} \otimes \{b\}) = \langle a, b \rangle$$

QM3. C_2 bir C_0 -gruptur ve C_0 -grubunun C_2 üzerine etkisi için $c_2 \in C_2, c_0 \in C_0$ için,

$$c_2 \cdot \delta_1(c_1) = \omega(\{\delta_2(c_2) \otimes \{c_1\} + \{c_1\} \otimes \delta_2(c_2)\});$$

QM4. $x, y \in C_2$ için,

$$\omega(\{x\} \otimes \{y\}) = [y, x]$$

şartları sağlıyorsa, $(C \otimes C, C_2, C_1, C_0, \omega, w)$ yapısı kuadratik modül olarak adlandırılır ve kısaca $(\omega, \delta_2, \delta_1)$ ile ifade edilir.

$(\omega, \delta_2, \delta_1)$ ve $(\omega', \delta'_2, \delta'_1)$ kuadratik modüller olmak üzere

$$\varphi = (f_2, f_1, f_0) : (\omega, \delta_2, \delta_1) \rightarrow (\omega', \delta'_2, \delta'_1)$$

dönüşümü için

$$\begin{array}{ccccccc}
C \otimes C & \xrightarrow{\omega} & C_2 & \xrightarrow{\delta_2} & C_1 & \xrightarrow{\delta_1} & \\
\downarrow f^* \times f^* & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 & & \\
C \otimes C & \xrightarrow{\omega'} & C'_2 & \xrightarrow{\delta'_2} & C'_1 & \xrightarrow{\delta'_1} &
\end{array}$$

diagramı değişmeli olacak şekilde bir ön nil(2) modül morfizmi (f_1, f_0) ve f_2 'nin n-değişik bir homomorfizması varsa, $\varphi = (f_2, f_1, f_0)$ dönüşümüne bir kuadratik modül morfizmi adı verilir.

Bu şekilde tanımlanan, kuadratik modüller kategorisi "**Kuad**" ile ifade edilir. Kuadratik modüllerin diğer kategoriler ile olan ilişkileri (Soylu Yılmaz & Yılmaz, 2022) çalışmasında verilmiştir.

Üç - Çaprazlanmış Modül

Bir 3- çaprazlanmış modül (Arvasi & ark., 2009)

$$K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

N grubunun K, L, M gruplarına etkisi, M grubunun K, L grubuna ve L grubunun K grubuna etkisi ile $\partial_1, \partial_2, \partial_3$ morfizmleri N, M – grup morfizmleri olmak üzere

$$\{-, -\}_{(1)(0)}: L \times L \rightarrow K,$$

$$\{-, -\}_{(0)(2)}: L \times L \rightarrow K, \{-, -\}_{(2)(1)}: L \times L \rightarrow K$$

$$\{-, -\}_{(1,0)(2)}: M \times L \rightarrow K, \{-, -\}_{(2,0)(1)}: M \times L \rightarrow K,$$

$$\{-, -\}_{(0)(2,1)}: L \times M \rightarrow K, \{-, -\}: M \times M \rightarrow L$$

3-boyutlu Peiffer dönüşümleri ile aşağıdaki şartları sağlayan bir grup kompleksidir.

- 1) $K \xrightarrow{\partial_3} L \xrightarrow{\partial_2} M, \{-, -\}_{(2)(1)}$ Peiffer dönüşümü ile birlikte bir 2-çaprazlanmış modüldür.
- 2) $\{m, \partial_3 k\}_{(1,0)(2)} = \{m, \partial_3 k\}_{(2,0)(1)} {}^m(k)^{\partial_1 m}(k^{-1})$
- 3) $\{\partial_3 k, m\}_{(0)(2,1)} = {}^m(k)k^{-1}$
- 4) $\{m, \partial_3 k\}_{(1,0)(2)} = \{m, \partial_3 k\}_{(2,0)(1)} \{\partial_3 k, m\}_{(0)(2,1)} k^{\partial_1 m}(k^{-1})$
- 5) $\{l', \partial_2 l\}_{(0)(2,1)} = \{l, l'\}_{(2)(1)}^{-1} \{l', l\}_{(1)(0)}$
- 6) $\{\partial_2 l, l'\}_{(2,0)(1)} = \{l, l'\}_{(0)(2)}^{-1} {}^{[l', l]}(\{l, l'\}_{(2)(1)}) \{l, l'\}_{(1)(0)}$
- 7) $\{\partial_2 l, l'\}_{(1,0)(2)} = (\{l, l'\}_{(0)(2)})^{-1}$
- 8) $\partial_3(\{l, l'\}_{(1)(0)}) = [l, l'] \{\partial_2 l, \partial_2 l'\}$
- 9) $\partial_3(\{l, l'\}_{(0)(2)}) = \partial_3(\{\partial_2 l, l'\}_{(1,0)(2)})^{-1}$
- 10) $\partial_3\{l, m\}_{(0)(2,1)} = {}^m(l)l^{-1}\{\partial_2 l, m\}$
- 11) $\partial_3\{m, l\}_{(2,0)(1)} = \partial_3\{m, l\}_{(1,0)(2)} {}^{\partial_1 m}(l)^m(l^{-1})\{m, \partial_2 l\}$
- 12) $\{\partial_3 k, l\}_{(1)(0)} = {}^l(k)k^{-1}$
- 13) $\{l, \partial_3 k\}_{(1)(0)} = k({}^l k)^{-1}$
- 14) $\{\partial_3 k, \partial_3 k'\}_{(1)(0)} = [k', k]$
- 15) $\{\partial_3 k, l'\}_{(0)(2)} = 1$
- 16) $\{\partial_2 l, \partial_3 k\}_{(1,0)(2)} = (\{l, \partial_3 k\}_{(0)(2)})^{-1}$
- 17) $\{\partial_2 l, \partial_3 k\}_{(2,0)(1)} = \{l, \partial_3 k\}_{(0)(2)} k^{\partial_2 l}(k^{-1})$
- 18) $\{\partial_3 k, \partial_2 l\}_{(0)(2,1)} = {}^{\partial_2 l}(k)k^{-1}$
- 19) $\partial_2\{m, m'\} = mm'm^{-1}({}^{\partial_1 m}(m'))^{-1}$

Bir 3- çaprazlanmış modül $(K, L, M, N, \partial_3, \partial_2, \partial_1)$ ifadesi ile gösterilir.

Bir 3-çaprazlanmış modül morfizmi aşağıdaki diyagram şeklinde gösterilir.

$$\begin{array}{ccccccc}
 L_3 & \xrightarrow{\partial_3} & L_2 & \xrightarrow{\partial_2} & L_1 & \xrightarrow{\partial_1} & L_0 \\
 f_3 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_1 \downarrow & & f_0 \downarrow \\
 L'_3 & \xrightarrow{\partial'_3} & L'_2 & \xrightarrow{\partial'_2} & L'_1 & \xrightarrow{\partial'_1} & L'_0
 \end{array}$$

Burada her $k \in K, l \in L, m \in M$ ve $n \in N$ için

$$f_1({}^n m) = f_0({}^n) f_1(m)$$

$$f_2({}^n l) = f_0({}^n) f_2(l)$$

$$f_3({}^n k) = f_0({}^n) f_3(k)$$

değişmelilik özelliğini sağlayan eşitlikleri sağlamak zorundadır.

$\{-, -\}_{(0)(2)}, \{-, -\}_{(2)(1)}$ ve $\{-, -\}_{(1)(0)}$ örgü dönüşümü tanımları için

$$\{, \} f_2 \times f_2 = f_2 \{, \}$$

eşitliği sağlanmalıdır.

$\{-, -\}_{(1,0)(2)}, \{-, -\}_{(2,0)(1)}$ tanımları için

$$\{, \} f_1 \times f_2 = f_3 \{, \}$$

şartı sağlanmalıdır.

$\{-, -\}_{(0)(2,1)}$ tanımı

$$\{, \} f_2 \times f_1 = f_3 \{, \}$$

ve $\{, \}$ tanımlaması için

$$\{ , \} f_1 \times f_1 = f_2 \{ , \}$$

şartı sağlanmalıdır.

Yukarıda tanımlanan objesi 3- çaprazlanmış modül, morfizmi yukarıdaki eşitlikleri sağlayacak şekilde tanımlanmış 3- çaprazlanmış modül morfizmi olmak üzere 3- çaprazlanmış modüllerin kategorisi elde edilir. 3- çaprazlanmış modüllerin kategorisi $\mathbf{X_3Mod}$ ile gösterilir.

Çaprazlanmış modül kompleksleri için tensör çarpımı Brown ve Higgins (Brown ve Higgins, 1987), 2-çaprazlanmış modül kompleksleri için tensör çarpımı Carrasco ve Porter (Carrasco ve Porter, 2016), kuadratik modül kompleksler için tensör çarpımı Baues (Baues,1991) çalışmalarında verilmiştir. 3-çaprazlanmış modül kompleksleri ve genelleştirme için tensör çarpımı literatürde bulunmamaktadır. 3-çaprazlanmış modül kompleksleri için tensör çarpımı tanımlanması durumunda truncation fonktoru ile örgülü yapıların elde edilmesi mümkündür.

KAYNAKÇA

Arvasi, Z., Kuzpinari, T.S., & Uslu, E.Ö. (2009). Three-crossed modules. *Homology, Homotopy and Applications*, 11 (2), 161-187.

Whitehead, J.H.C. (1949). Combinatorial homotopy II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55 (5), 453-496.

Alp, M., & Wensley, C.D. (2004). X-Mod. *Crossed modules and Cat1-groups: a GAP4 package*.

Odabaş, A., & Soylu, E. (2019). Relationships between category theory and functional programming with an application. *Turkish Journal of Mathematics*, 43 (3), 1566-1577.

Yılmaz, E.S., Arslan, U.E., & Kundakçioğlu, Ş. (2022). The Theory of Ultra-Groups and GAP Applications. *Ikonion Journal of Mathematics*, 4 (2), 1-11.

Porter, T. (1982). Internal categories and crossed modules. *In Category Theory* (pp. 249-255). Springer Berlin/Heidelberg.

Porter, T. (1980). *Crossed Modules and Internal Categories in Categories of Groups with Operations*. University of Wales. School of Mathematics and Computer Science.

Yılmaz, E.S., & Arslan, U.E. (2022). Internal Cat-1 and X-Mod. *Journal of New Theory*, 38, 79-87.

Arslan, U.E., & Yılmaz, E.S. (2022). On Internal Categories in Higher Dimensional Groups. *Journal of Universal Mathematics*, 5 (2), 129-138.

Grandjeán, A.R., & Vale, M.J. (1988). 2-modulos cruzados an la cohomologia de André-Quillen, *Memorias de la Real Academia de Ciencias*, 22,(1986), 1-28, see also: Linear methods in André-Quillen cohomology. *CR Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 10, 243-248.

Yılmaz, K. (2017). 2-Crossed modules over same base. *Sakarya University Journal of Science*, 21 (6), 1210-1220.

Yılmaz, K. & Ulualan, E. (2019). Construction of higher groupoids via matched pairs actions. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1492-1503.

Yılmaz, E.S. (2022a). (Co) Limit calculations in the category of 2-crossed $\mathcal{R}$ -modules. *Turkish Journal of Mathematics*, 46 (7), 2902-2915.

Yılmaz, E.S., & Yılmaz, K. (2022). On relations among quadratic modules. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 45 (18), 12231-12244.

Brown, R., & Higgins, P.J. (1987). Tensor products and homotopies for ω -groupoids and crossed complexes. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 47 (1), 1-33.

Carrasco, P., & Porter, T. (2016). Coproduct of 2-crossed modules: applications to a definition of a tensor product for 2-crossed complexes. *Collectanea mathematica*, 67, 485-517.

BÖLÜM V

İnternal Kategoriler ve Çaprazlanmış Modüller

Koray YILMAZ¹

Giriş

CW kompleksi, şu şekilde bir dizi topolojik uzayın birleşimi alınarak oluşturulur:

$$\emptyset = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots$$

şeklindeki bir dizi topolojik uzayın birleşimi alınarak oluşturulur: Her X_k uzayı, önceki uzay X_{k-1} uzayından k -hücrelerin kopyalarını her biri k -boyutlu top D_k ile homeomorfik olan, X_{k-1} uzayına sürekli bağlama dönüşümleri aracılığıyla ekleyerek elde edilir. Genellikle X_k , CW kompleksinin k -iskeleti

¹ Koray Yılmaz, Dr.Öğretim Üyesi, Kütahya Dumlupınar Üniversitesi, Matematik Bölümü

olarak adlandırılır. CW kompleksinin tamamının topolojisi alt uzay topoloji kullanılarak tanımlanır:

Kategori teorisinde, X üzerindeki topoloji

$$X_{-1} \hookrightarrow X_0 \hookrightarrow X_1 \hookrightarrow \dots$$

diyagramın direkt limitidir. " CW " ifadesi, "kapanışı sonlu alt uzay topolojisi (Closure-finite Weak topology)" anlamına gelir. CW kompleksi inşası sürecin şu şekilde özetleyebiliriz.

0-boyutlu bir CW kompleksi, yalnızca sıfır veya daha fazla ayrık noktanın bir kümesidir (üzerinde ayrık topoloji olacağı aşıkardır).

1-boyutlu bir CW kompleksi, bir veya daha fazla birim aralığının sıfır-boyutlu bir CW kompleksi ile ayrık birleşimini alarak oluşturulur. Her bir kopya için, sınırlarını (iki uç noktasını) sıfır-boyutlu kompleksin elemanlarına (noktalar) "yapıştıran" bir dönüşüm bulunur. CW kompleksinin topolojisi, bu yapıştırma haritaları tarafından tanımlanan bölüm uzayının topolojisi ile tanımlanır.

Genel olarak, bir n -boyutlu CW kompleksi, $k < n$ için k -boyutlu bir CW kompleksi ile bir veya daha fazla n -boyutlu topun ayrık birleşimini alarak oluşturulur. Her bir kopya için, sınırlarını ($n-1$)-boyutlu küre) k -boyutlu kompleksin elemanlarına "yapıştıran" bir dönüşüm bulunur. CW kompleksinin topolojisi, bu yapıştırma haritaları tarafından tanımlanan bölüm topolojisinin topolojisi ile tanımlanır.

Sonsuz-boyutlu bir CW kompleksi, yukarıdaki süreci sayılabilir sayıda tekrarlayarak oluşturulabilir.

Bağılantılı CW -kompleks X 'in homotopi grupları 2 ve üstü boyutlarda aşık olanlar arasındaki homotopi kategorisi ile gruplar kategorisi arasındaki eşdeğerlik literatürde iyi bilinmektedir. Loday (Loday,1982) $i > n + 1$ için (n sabit doğal sayı olmak üzere) benzer bir eşdeğerlik ifadesini göstermiştir. Whitehead

(Whitehead,1949), $n = 1$ için çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır. Loday ise çaprazlanmış modül kavramını herhangi bir n için genelleme yaparak bir n -cat-grup" üretmek üzere yeniden formüle etmiştir.

Cat-1 grup kavramı, çaprazlanmış modül aksiyomlarını ifade etmenin başka bir yoludur. Ancak cat-1 grupları için kullanılan karakterizasyon tipi ve cat- n grupları için elde edilen karakterizasyon tipi, daha kategorik olarak tanımlanan çeşitlerinden doğrudan grup teorik terimlerle ifade edilir. Örneğin, bir simplisel grup yapısından bir cat-1 grup yapısı elde etmek veya bir n -cat simplisel grup yapısından bir cat- n grup yapısı elde etmek genellikle kolaydır. İnternal kategori kavramı, geri çekme objeye sahip başka bir kategori içinde formüle edilebilir. Cebirsel yapılar, uygun nesneleri ve morfizmleri belirleyerek bir kategoride tanımlanabilir, böylelikle $\mathcal{C}$ kategorisi içinde kategoriler oluşturabilir.

Tanım: A , geri çekme objesi olan bir kategori olsun. A içindeki bir kategori, A kategorisinin internal kategorisi, aşağıdakilerden oluşur:

Objeler kümesi $C_0 \in A$;

Morfizma kümesi $C_1 \in A$;

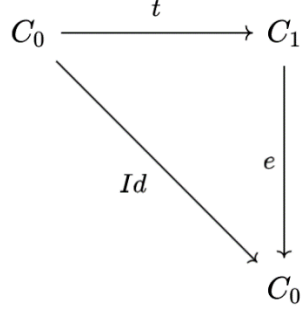
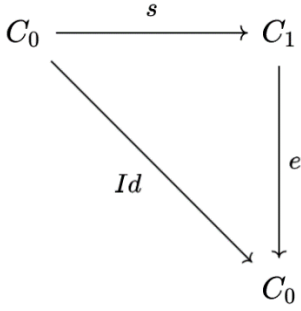
Kaynak ve hedef morfizleri $s, t: C_1 \rightarrow C_0$;

Birim morfizm $e: C_0 \rightarrow C_1$;

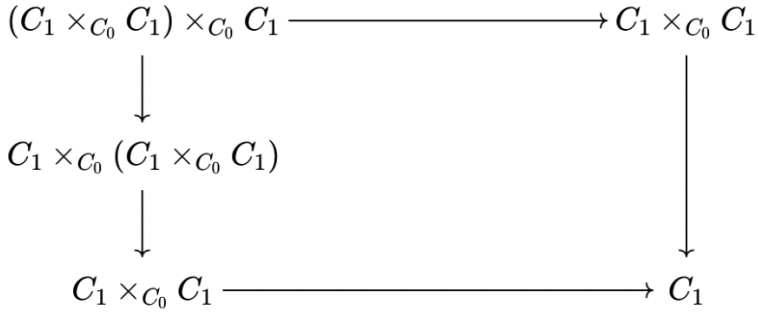
Kompozisyon $c: C_1 \times_{C_0} C_1 \rightarrow C_1$;

öyleki bu verilenler için kategori şartlarını sağlayacak şekilde aşağıdaki diyagramlar değişmeli olur.

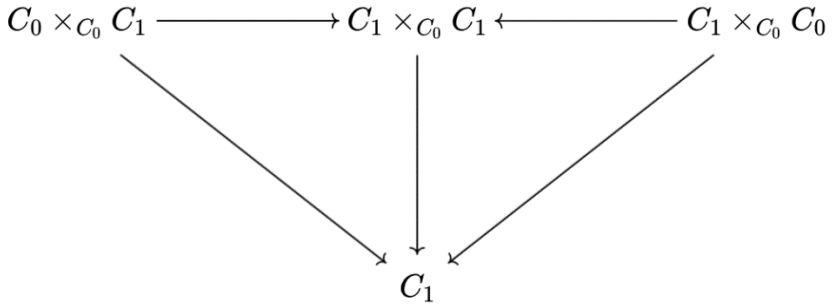
Birim morfizmin hedef ve kaynak morfizmini belirleyen kurallar



Morfizmlerin kompozisyonu için asosyatiflik kuralı



Morfizmlerin kompozisyonu için sağ ve sol birim kuralı



Geri çekme obje oluşan diğer izomorfizmler

$$\begin{array}{ccccc}
C_1 \times_{C_0} C_1 \longrightarrow C_1 & C_1 \times_{C_0} (C_1 \times_{C_0} C_1) \longrightarrow C_1 \times_{C_0} C_1 & (C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 \longrightarrow C_1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow \\
C_1 \xrightarrow{t} C_0 & C_1 \longrightarrow C_0 & C_1 \times_{C_0} C_1 \longrightarrow C_0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_1 \times_{C_0} C_1 \\
\downarrow & \searrow & \downarrow \\
C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_1 \xrightarrow{t} C_0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
(C_1 \times_{C_0} C_1) \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_1 \\
\downarrow & \searrow & \downarrow \\
C_1 \times_{C_0} C_1 & \xrightarrow{\quad} & C_1 \xrightarrow{t} C_0
\end{array}$$

şeklinde. $\mathcal{C}$ bir kategori **Set** kümeler kategorisi **Grp** grupların kategorisi olmak üzere internal kategoriler için

Set içindeki bir kategori, bir küçük kategori

$\mathcal{C}$ kategorisinde bir eşkategori, $\mathcal{C}^{op}$ içindeki bir kategori

Bir double kategori, Cat içindeki bir kategoridir.

Bir double bikategori, Bicat içindeki bir kategori

Bir çaprazlanmış modül, **Grp** içindeki bir kategoriye eşdeğer

örneklerini verebiliriz. İnternal kategorilerle ilgili ayrıntılı bilgi için (Porter,1982), (Porter,1982), (Yılmaz ve Arslan, 2022), (Arslan ve Yılmaz,2022) çalışmalarına bakılabilir.

Tanım: $\delta: G_2 \rightarrow G_1$ ve $\delta': H_2 \rightarrow H_1$ birer çaprazlanmış modüle olmak üzere,

$$f_1: G_1 \rightarrow H_1$$

$$f_2: G_2 \rightarrow H_2$$

grup homomorfizmleri olsun. Eğer her $r \in R$ ve her $c, c' \in \mathcal{C}$ için

$$f_2(g_1 g_2) = f_1(g_1) f_2(g_2)$$

şartı sağlanıyor ve

$$\begin{array}{ccc}
 G_2 & \xrightarrow{\delta} & G_1 \\
 \downarrow f_2 & & \downarrow f_1 \\
 H_2 & \xrightarrow{\delta'} & H_1
 \end{array}$$

diyagramı değişmeli oluyorsa

$$(f_2, f_1): (G_2, G_1, \delta) \rightarrow (H_2, H_1, \delta')$$

morfizmine çaprazlanmış modül morfizmi denir. Böylece ***XMOD*** ile göstereceğimiz çaprazlanmış modüller kategorisini elde ederiz.

Çaprazlanmış modüller ve kategoriksel özelliklerli üzerine literatürde çok sayıda çalışma mevcuttur. Ayrıca çaprazlanmış modüllerin bilgisayar uygulamaları (Alp ve Wensley, 2003), (Odabaş ve Soylu, 2019), (Yılmaz vd, 2022b) çalışmalarında verilmiştir.

Tanım: Bir 2- çaprazlanmış modül

$$L \xrightarrow{\partial_2} M \xrightarrow{\partial_1} N$$

N grubunun L, M gruplarına etkisinden oluşan bir grup kompleksidir. Bu kompleks ile birlikte

$$\{-, -\}: M \times M \rightarrow L$$

olarak bilinen Peiffer dönüşümü aşağıdaki şartları sağlar:

$$\partial_2\{m_1, m_2\} = m_2^{\partial_1(m_1)}(m_1 m_2^{-1} m_1^{-1})$$

$$\{\partial_2(l_1), \partial_2(l_2)\} = [l_2, l_1]$$

$$\{m_1 m_2, m_3\} = \{m_2, m_3\}^{\partial_1(m_1)} \{m_1, m_2 m_3 m_2^{-1}\}$$

$$\{m_1, m_2 m_3\} = \{m_1, m_2\}^{m_1 m_2 (m_1)^{-1}} \{m_1, m_3\}$$

$$\{m_1, \partial_2(l_1)\} \{\partial_2(l_1), m_1\} = l_1^{\partial_1(m_1)} l_1^{-1}$$

$$\{m_1, m_2\}^n = \{m_1^n, m_2^n\}$$

$(L, M, N, \partial_1, \partial_2, \{-, -\})$ ile bir 2- çaprazlanmış modül ifade edilir.

$(L, M, N, \partial_1, \partial_2, \{-, -\})$, $(L', M', N', \partial'_1, \partial'_2, \{-, -\}')$ ile tanımlanan iki 2- çaprazlanmış modül olsun. Bu 2- çaprazlanmış modüller arasındaki morfizm şu şekilde tanımlanır.

$\delta = (\alpha, \beta, \gamma): (L, M, N) \rightarrow (L', M', N')$ bir 2- çaprazlanmış modül morfizmi olabilmesi için,

$$\begin{array}{ccccccc} M \times M & \xrightarrow{\{-, -\}} & L & \xrightarrow{\partial_2} & M & \xrightarrow{\partial_1} & N \\ \downarrow \beta \times \beta & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma \\ M' \times M' & \xrightarrow{\{-, -\}'} & L' & \xrightarrow{\partial'_2} & M' & \xrightarrow{\partial'_1} & N' \end{array}$$

diyagramı değişmeli ve $m \in M, n \in n$ ve $m \in M$ olmak üzere

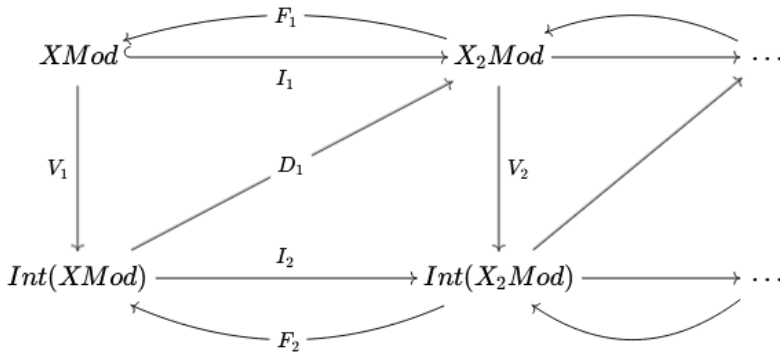
$$\beta(m^n) = \beta(m)^{\gamma(n)}$$

$$\alpha(l^n) = \alpha(l)^{\gamma(n)}$$

eşitliklerini sağlamalıdır.

Yukarıda verilen 2- çaprazlanmış modül objesi ve aralarında tanımlanan morfizmi yardımıyla 2- çaprazlanmış modül kategorisi elde edilir. X_2Mod şeklinde ifade edilir.

2- çaprazlanmış modüller ve kategoriksel özellikleri için detaylı olarak (Carrasco ve Porter,2016), (Conduuche,1984), (Yılmaz,2022a), (Yılmaz,2022b) çalışmalarına bakılabilir. Çaprazlanmış modüllerin bir üst boyutunda sağlanan bir kategoriksel özellik internal kategorisi içinde sağlanacağı ve bu kategoriksel özelliğin fonktörler altında korunduğu gösterilebilir.



KAYNAKÇA

Alp, M. & Wensley, C. D. (2004). XMod. *Crossed modules and Cat1-groups: a GAP4 package*.

Arslan, U. E. & Yılmaz, E. S. (2022). On internal categories in higher dimensional groups. *Journal of Universal Mathematics*, 5(2), 129-138.

Carrasco, P. & Porter, T. (2016). Coproduct of 2-crossed modules: applications to a definition of a tensor product for 2-crossed complexes. *Collectanea mathematica*, 67, 485-517.

Conduché, D. (1984). Modules croisés généralisés de longueur 2. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 34(2-3), 155-178.

Loday, J. L. (1982). Spaces with finitely many non-trivial homotopy groups. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 24(2), 179-202.

Odabaş, A. & Soylu, E. (2019). Relationships between category theory and functional programming with an application. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1566-1577.

Porter, T. (1982). Internal categories and crossed modules. In *Category Theory*. Springer Berlin/Heidelberg, 249-255.

Porter, T. (1980). *Crossed Modules and Internal Categories in Categories of Groups with Operations*. University of Wales. School of Mathematics and Computer Science.

Whitehead, J. H. C. (1949). Combinatorial homotopy II. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 55(5), 453-496.

Yılmaz, E. S. & Arslan, U. E. (2022). Internal Cat-1 and XMod. *Journal of New Theory*, (38), 79-87.

Yılmaz, E. S., Arslan, U. E., & Kundakçioğlu, Ş. (2022). The theory of ultra-groups and GAP applications. *Ikonion Journal of Mathematics*, 4(2), 1-11.

Yılmaz, E. S. (2022a). (Co) limit calculations in the category of 2-crossed R -modules. *Turkish Journal of Mathematics*, 46(7), 2902-2915.

Yılmaz, E. S. (2022b). 4-dimensional 2-crossed modules. *Journal of New Theory*, (40), 46-53.