BİDGE Yayınları

Matematik Eğitiminde Güncel Araştırmalar

Editör: Doç. Dr. Muhammet DORUK

ISBN: 978-625-372-071-1

1. Baskı
Sayfa Düzeni: Gözde YÜCEL
Yayınlama Tarihi: 25.12.2023
BİDGE Yayınları

Sertifika No: 71374
Yayın hakları © BİDGE Yayınları
www.bidgeyayinlari.com.tr - bidgeyayinlari@gmail.com
Krc Bilişim Ticaret ve Organizasyon Ltd. Şti.
Güzeltepe Mahallesi Abidin Daver Sokak Sefer Apartmanı No: 7/9 Çankaya / Ankara

BİDGE Yayınları

ÖNSÖZ

Literatürde matematiğin herkes tarafından kabul edilen bir tanımı mevcut değildir. Bilim insanları kendi bakış açılarına göre tanımlamalar yapmışlardır. Buna rağmen matematik, özü itibariyle matematiksel nesneler ve bu nesneler arasındaki ilişkileri inceleyen bir bilim dalı olarak düşünülebilir. Sağladığı bireysel ve toplumsal faydalarından dolayı bir kültür olarak nesilden nesile aktarımı yapılmaktadır. Matematik eğitimi de, bu kültürleme faaliyetlerini konu edinen bir çalışma alanıdır.

Matematik eğitimi çalışmalarının ilgi alanı, sadece öğretime yönelik faaliyetler olmayıp eğitim paydaşlarının (öğrenci, öğretmen adayı, öğretmen vb.) bilişsel, duyuşsal ve psikomotor özelliklerinin incelenerek ortaya çıkarılmasıdır. Çünkü öğretime yönelik herhangi bir faaliyet gerçekleştirilmeden önce odak grubun konu ile ilgili önemli özelliklerinin detaylı bir şekilde anlaşılması gerekmektedir. Grubun özelliklerini tam olarak anlamadan uygulanan öğretimsel yöntemlerin ne kadar sağlıklı olabileceği tartışmaya açıktır. Bu nedenle öğretimsel faaliyetler yapılmadan önce durum tespitinin yapılması, öğretim planlarının yapılması ve uygulanması adına faydalı olacaktır.

Matematiğin tarihsel süreç içerisindeki gelişimi ile bağlantılı olarak matematik eğitimi de dinamik bir yapı sergilemektedir. Sürekli değişim ve gelişim halindedir. Dönemsel olarak çalışılan konular veya çalışmalarda benimsenen yaklaşımlar farklılık göstermektedir. Bu oldukça doğal bir devinimdir. Çünkü matematik eğitiminin merkezinde insan vardır. Her dönem insanın ve onunla bağlantılı olan toplumun ilgi ve ihtiyaçları değişmektedir. Dönemsel olarak ihtiyaç duyulan ideal insan tipindeki değişim, matematik eğitimi çalışmalarında araştırılan konuların seçimini de etkilemektedir.

Bu kitapta çalışmasında son dönemde matematik eğitimi literatüründe araştırılan konulardan olan matematik okuryazarlığı, matematiksel ispat ve yaratıcılık üzerine yapılan çalışmalara yer verilmiştir. Alanında uzman akademisyenlerce kaleme alınan bu çalışmalarda sadece konular hakkında bilgiler değil aynı zamanda çalışmalardan elde edilen sonuçlar bakımından da önem arz etmektedir. Öğretimsel çalışmalarda odaklanılması gerekenlerle ilgili fikir vermektedir. Konularla ilgili ileride yapılacak araştırmalar için önemli ipuçlarının yer aldığı "Matematik Eğitiminde Güncel Araştırmalar" kitabının alana katkı sunması ümidiyle…

Editör

Doç. Dr. Muhammet DORUK

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM I

Kırsalda Öğrenim Gören Ortaokul Öğrencilerinin Görsel Matematik Okuryazarlığı Özyeterlik Algı Düzeyleri

Ahmet Muammer ÖZKAN[1]
Kürşat YENİLMEZ[2]

Giriş

M.Ö. 3500'lerde Sümerler tarafından geliştirilen yazının bulunmasına dair önemli kanıtlar mevcuttur. Bu durum Okuryazarlık kavramının temellerinin ne kadar eski olduğunu göstermektedir. Zaman içinde, okuma ve yazma becerileri, toplumların sadece iletişim kurmalarında değil, aynı zamanda sosyoekonomik ve kültürel yapılarının gelişiminde de kilit bir rol oynamıştır. Yazının

[1] Matematik Öğretmeni, Millî Eğitim Bakanlığı, Mehmet Azman Çavuş Ortaokulu, Balıkesir, Türkiye, ORCİD: 0009-0004-0225-9136

[2] Prof. Dr., Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Eskişehir, Türkiye, ORCİD: 0000-0001-6256-4686

keşfinden itibaren toplumlar, okuma ve yazma eğitimine özel bir vurgu yaparak bu becerileri geliştirmişlerdir. Johannes Gutenberg (1398-1468), metal alaşımı konusundaki yeteneği sayesinde 1450 yılında metal harflerle basım tekniğini bulmuştur. Bu durum kaliteli ve temiz kitap baskılarının yapılmasını sağlayarak matbaanın gelişimine katkı sağlamıştır. Basım tekniklerinin evrimi, matbaanın keşfinden bu yana öne çıkan "okuma ve yazma" kavramını derinleştirerek, sonrasında önem kazanan "okuryazarlık" kavramını 21. yüzyıla taşımıştır.

21. yüzyılda, okuryazarlık kavramı bilgi inşa ve doğrulama süreçleriyle sıkı bir şekilde bağlantılı hale gelmiştir. Bu dönemde dijital teknolojiler, genellikle daha dikkatli şekilde derlenen bilgilerin yer aldığı ansiklopediler ve gazeteler gibi geleneksel kaynakları değiştirmiş, bu da her türlü bilginin hızla yayılmasına olanak tanımıştır. Dijital çağın getirdiği bu büyük bilgi akışı, okuyucuların gerçeklik ile fikir arasındaki farkı ayırt etme becerisini daha da önemli hale getirmektedir (OECD, 2021a).

Okuryazarlık kavramı, genellikle bir kişinin temel eğitimi sırasında edindiği yazma ve okuma becerilerini içermektedir. Aşıcı (2009)' ya göre okuryazarlık ise, kelime ve semboller aracılığıyla yazılmış metinleri anlama, bu sembollerle ifade edilen anlamı çözme sürecini içermektedir. Altun (2005) ise okuryazarlığı, toplumdaki bilgilerin, becerilerin ve normların anlaşılması, paylaşılması, yorumlanması ve gelecek nesillere aktarılması için kullanılan bir etkileşim aracı olarak tanımlamaktadır. Bu bağlamda, okuryazarlık, sadece temel okuma ve yazma becerilerini değil, aynı zamanda bilgileri anlama ve bu bilgileri toplum içinde etkili bir şekilde kullanma sürecini içerir. Okuryazarlık, sadece bireyin kişisel gelişimine değil, aynı zamanda toplumsal etkileşim ve kültürel aktarım açısından da önemli bir rol oynar. Bu durum okuryazarlığın çeşitlenmesine yol açmıştır.

Türk Dil Kurumu'nun Güncel Türkçe Sözlüğünde, okur-yazarlık durumu olarak ifade edilen kavram, günümüze kadar farklı alanlarda (edebiyat, psikoloji, fen, sağlık, hukuk vb.) çeşitli şekillerde tanımlanmış ve farklı perspektiflerden ele alınmış bir kavramdır. Bu kavram, bireyin sadece metinleri anlama ve üretme yeteneğini değil, aynı zamanda farklı bilgi alanlarında etkili bir şekilde iletişim kurma ve düşünsel birikimini genişletme sürecini de içermektedir. Bunun yanında okuryazarlığın belirlenen hedeflere, kullanılan araçlara ve elde edilen bilgilere bağlı olarak değişebileceği ve hatta günlük yaşam, bilim ve teknolojideki ilerlemelere paralel olarak daha spesifik okuryazarlık türlerinin tanımlanma gerekliliği öne çıkmaktadır (Sanalan, Sülün & Çoban, 2007). Örneğin, bilgisayar okuryazarlığı, sanat okuryazarlığı, medya okuryazarlığı (Altun, 2003), görsel okuryazarlık (Anderson, 2002) ve matematik okuryazarlığı (Ersoy, 2003) gibi farklı okuryazarlık alanları bulunmaktadır. Hatta farklı okuryazarlıkların birleşmesiyle görsel matematik okuryazarlığı gibi kavramlar ortaya çıkmıştır. Fakat bu kavramların temel okuryazarlık kavramlarının destekleyicisi olduğu unutulmamalıdır (Chauvin, 2003; Reinking, McKenna, Labbo & Kieffer,1998; Sims, O'Leary, Cook & Butland, 2002).

Matematik okuryazarlığı kavramının ilk açıklamaları, NCTM (1989) raporunda yer alır. Bu raporda, öğrenenlerin matematik okuryazarlığı bağlamında beş temel hedefi belirtilmiştir:

- Matematikle ilgili değerlere sahip olmayı öğrenmek,
- Matematik yapma becerilerine güven duymayı öğrenmek,
- Matematiksel problemleri çözebilen bireyler olmayı öğrenmek,
- Matematiksel olarak iletişim kurmayı öğrenmek,
- Matematiksel akıl yürütme yeteneklerini geliştirmeyi öğrenmek.

Ardından, Uluslararası Matematik ve Fen Çalışması (TIMSS), 1995 yılında başlatılarak matematik ve fen okuryazarlığı değerlendirilmiştir. Daha sonra, 1999 yılında başlayan Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programı (PISA), matematik okuryazarlığı terimine yönelik ilk açık tanımlama girişimini sunmuştur (Stacey ve Turner, 2015).

Matematik okuryazarlığı, bireyin matematikle ilgili kavramları anlama, yorumlama, kullanma ve uygulama yeteneğini ifade eder. Bu kavram, sadece temel aritmetik becerilerini içermekle kalmaz, aynı zamanda daha karmaşık matematiksel kavramları anlama, problem çözme yeteneği, matematiksel düşünce becerileri, veri analizi, geometri, cebir gibi konuları içerir. Matematik okuryazarlığı, bireyin matematikle ilgili günlük yaşamda karşılaştığı durumları anlamasını, değerlendirmesini ve bu bağlamda bilinçli kararlar almasını sağlar. Bu kavram, sadece matematiksel hesaplamaları değil, aynı zamanda matematiksel düşünce süreçlerini ve bu düşünceyi pratik hayatta uygulama yeteneğini de içerir. Bu beceriler, bireyin iş dünyasında, bilimde, mühendislikte, teknolojide ve bir dizi diğer alanda başarılı olabilmesi için kritik öneme sahiptir. Matematik okuryazarlığı, bireylere analitik düşünme, eleştirel düşünme ve problem çözme becerilerini geliştirme fırsatı sunar. Bu nedenle, eğitim sistemlerinde matematik okuryazarlığını teşvik etmek ve geliştirmek önemli bir hedef olmuştur.

Hortin (1980) ve Debes (1968)' in ortaya çıkardığı, görsel bir şekilde verilen bilgiyi anlama, değerlendirme, kullanma, yeni görsel ortamlar oluşturabilme becerisini ifade eden görsel okuryazarlık; diğer okuryazarlık türleriyle sıkı bir ilişki içindedir, hatta birçoğunun destekleyicisi veya bir parçasıdır (Kellner, 1998). Soyut düşünceleri somutlaştırma ve aynı düşünceyi çeşitli yollarla işleme yeteneği, özellikle matematik okuryazarlığı bağlamında öne çıkan bir ilişki olarak vurgulanmaktadır (Feinstein ve Hagerty, 1994; İpek, 2003). Ortaya çıkan bu bağ, Tekin ve Tekin'in (2004) görsel ve matematik okuryazar bireylerde, şekil, uzay, zaman ve hareketle ilişkili deneyimleri tüm duyuları kullanarak tanıyabilme ve analiz edebilme özelliklerini içeren yeni bir okuryazarlık kavramı olan 'Görsel Matematik Okuryazarlığı (GMO)'nı ortaya koymalarına yol açmıştır.

Görsel Matematik Okuryazarlığı, "günlük hayatta karşılaşılan matematiksel problemleri görsel veya uzamsal, tersine görsel veya uzamsal bilgileri de matematiksel olarak algılayabilme, ifade edebilme, yorumlayabilme, değerlendirme ve kullanabilme yeterliği" şeklinde tanımlanabilir. Görsel matematik okuryazarlığının artması, bireylerin matematikle ilgili konulara karşı duydukları ilgiyi ve motivasyonu artırabilir. Bu artan ilgi ve motivasyon, özyeterlik algısını güçlendirebilir. Birey, görsel matematik okuryazarlığına sahip olduğunda matematikle ilgili görevlere daha istekli bir şekilde yaklaşabilir ve bu da özgüveni artırabilir. Bu nedenle, görsel matematik okuryazarlığı ile özyeterlik algısı arasında güçlü bir etkileşim bulunmaktadır. İyi bir görsel matematik okuryazarlığı, bireyin matematikle ilgili görevlere olan özgüvenini artırabilir ve matematikle daha olumlu bir ilişki kurmalarına yardımcı olabilir. Bu durum, matematik öğreniminde başarıyı teşvik edebilir.

Kırsal alanlarda görsel matematik okuryazarlığı, kırsal toplumların matematikle ilgili görsel unsurları anlama, yorumlama ve etkili bir şekilde kullanma becerisini içerir. Bu kavram, matematik öğrenimini güçlendirmek, kırsal toplumlarda matematikle ilgili özgüveni artırmak ve pratik uygulamalarla günlük hayatta matematik kullanımını teşvik etmek amacıyla değerlendirilebilir. Kırsal alanlarda yaşayan bireyler, tarım, hayvancılık ve diğer kırsal faaliyetlerle ilgili günlük yaşamlarında matematiksel problemlerle karşılaşabilirler. Görsel matematik okuryazarlığı, bu problemleri anlamak, görsel unsurlar aracılığıyla çözmek ve günlük hayatta matematiksel düşünceyi entegre etmek için önemlidir. Kırsalda görsel matematik okuryazarlığı, günlük yaşamın gerçek zorluklarına matematiksel bakış açısını entegre etme ve kırsal toplulukların sürdürülebilirlik açısından matematiksel becerilerini güçlendirme potansiyeline sahiptir. Bu, kırsal toplulukların genel kalkınmasına ve matematikle daha güçlü bir bağ kurmalarına yardımcı olabilir.

Uluslararası araştırmalar ve yenilenen eğitim programlarında matematik okuryazarlığının gündeme gelmesiyle birlikte görsel matematik okuryazarlığı ile ilgili Türkiye’ de de araştırmalar yapılmaktadır. Fırat ve Bal (2021), altıncı sınıf öğrencilerinin matematiksel modelleme etkinliklerinin matematiksel modelleme yeterliklerine, görsel matematik okuryazarlığı algılarına ve okuduğunu anlama becerilerine olan etkisini araştırmışlardır. Yapılan araştırma sonuçlarına göre, matematiksel modelleme etkinlikleriyle yürütülen öğretim süreci sonunda, öğrencilerin okuduğunu anlama becerilerinde belirgin bir artış gözlemlenmiştir. Ancak, okuduğunu anlama becerileri ile matematiksel modelleme yeterlikleri arasında anlamlı bir ilişki saptanmamıştır. Araştırma, matematiksel modelleme etkinliklerinin, öğrencilerin görsel matematik algılarına ve matematiksel modelleme yeterlik düzeylerine önemli katkılarda bulunduğunu ortaya koymuştur. Görsel matematik okuryazarlığı ile modelleme yetkinlikleri arasında orta düzeyde anlamlı bir ilişkinin varlığı, özyeterlik algıları açısından tespit edilmiştir. Deveci ve Karademir (2018) tarafından gerçekleştirilen araştırma sonuçlarına göre, incelenen değişkenlere bağlı olarak, ortaokul öğrencilerinin matematik öz-bildirim ve görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısı düzeylerinde farklılaşmalar gözlemlenmiştir. Bu farklılaşma, cinsiyet, sınıf düzeyi, ders notları, demokratik öğretmen ve demokratik anne-baba gibi değişkenlere göre çeşitlilik göstermektedir. Araştırmada elde edilen bulgular, matematik öz bildirim düzeyi ile görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısı arasında orta düzeyde pozitif bir ilişki olduğunu ortaya koymaktadır. Aygüner ve Ev Çimen (2016) tarafından yürütülen çalışma, sekizinci sınıf öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı öz yeterlik algıları ile gerçek performanslarının karşılaştırılmasına odaklanmıştır. Araştırma sonuçları, öğrencilerin genel olarak ve üç farklı alt faktörde görsel matematik okuryazarlığı konusunda kendilerini yeterli gördüklerini göstermektedir. Ancak dikkat çeken bir durum, öğrencilerin bu öz yeterlik algılarının, gerçek performansları ile örtüşmediğidir. Yani öğrenciler, kendilerini yeterli olarak görmelerine rağmen gerçek performansları bu algıları yansıtmamaktadır. İlhan ve Tutak (2015) tarafından gerçekleştirilen çalışma, ilköğretim matematik öğretmen adaylarının görsel matematik okuryazarlığı seviyelerini saptama amacını gütmekte olup bu seviyeler ile geometri başarıları arasındaki ilişkiyi incelemeye yönelik bir odaklanma sağlamıştır. Araştırma sonuçlarına göre, öğrencilerin görsel matematik okuryazarlıkları ile geometri başarıları arasında pozitif yönde bir ilişki bulunsa da bu ilişki düşük düzeydedir. Ayrıca, geometri başarısının görsel matematik okuryazarlığı çerçevesinde tahminleme düzeyi incelenmiş ve geometri başarısının sadece %3,6'sının görsel matematik okuryazarlığı tarafından açıklandığı tespit edilmiştir. Veriler, geometri başarısını tahminleme konusunda görsel matematik okuryazarlığının sınırlı bir etkisi olduğunu göstermektedir. Çilingir ve Dinç Artut (2015), ilkokul düzeyinde Gerçekçi Matematik Eğitimi (GME) yaklaşımıyla gerçekleştirilen öğretimin öğrencilerin matematik başarılarına, görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarına ve matematik problemlerini çözmeye yönelik tutumlarına etkisini araştırmışlardır. Yapılan araştırmanın sonuçlarına göre, deney grubundaki öğrenciler kontrol grubundaki öğrencilere göre matematik başarı testinde daha başarılı olmuşlardır. Ayrıca, görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarında ve matematik problemlerini çözmeye yönelik tutumlarında daha fazla gelişim gösterdikleri gözlemlenmiştir. Duran ve Bekdemir (2011) 7. sınıf öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları ile görsel matematik başarıları arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Bulgular, görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısı ile görsel matematik başarısı arasında pozitif yönde orta düzeyde bir ilişki olduğunu göstermiştir. Ayrıca, görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısının, öğrencilerin görsel matematik başarılarını anlamlı bir şekilde açıkladığı belirlenmiştir. Bunun yanında öğrencilerin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algı puanları kontrol edilmediğinde, görsel matematik başarı puanları, okulun bulunduğu yerin sosyoekonomik düzeyine (SED) göre anlamlı şekilde değişkenlik gösterirken, cinsiyete bağlı olarak anlamlı bir farklılık göstermemiştir. Araştırmanın nitel bulgularına göre, öğrenciler, görsel olarak sunulan bir problemi daha iyi anladıklarını ifade ederek görsel matematik okuryazarlığını (GMO) görselleri anlama, görsel temelli sorular hazırlama ve şekilli soruları yorumlama becerisi olarak tanımlamışlardır. Görsel matematik okuryazarlığını, görselleri tanıma, görsel problemleri çözme ve görsel zekâya sahip olma gibi yetenekleri içeren özelliklerle ilişkilendiren öğrenciler, görsel matematik okuryazarının bu niteliklere sahip olmanın görsel matematik başarısını artırdığına inanmaktadır. Yine Uysal ve Yenilmez (2011) tarafından gerçekleştirilen çalışmada, 8. sınıf öğrencilerinin matematik okuryazarlığı düzeylerini belirlemek amacıyla yapılan test sonuçlarına göre, öğrencilerin büyük bir kısmının matematik okuryazarlıklarının 3.düzeyin aşağısında olduğu tespit edilmiştir. Bunun yanında bu düzeylerin cinsiyet, okul öncesi eğitim, aile aylık gelir durumu ve anne-baba eğitim durumu gibi değişkenlerle ilişkisi incelenmiştir. Araştırmanın sonuçları, matematik okuryazarlık düzeylerinin dağılımları ile cinsiyet, ebeveynlerin gelir durumu ve eğitim seviyesi arasında anlamlı seviyede farklılaşmalar olduğunu göstermiştir.

Yapılan literatür taramasında Türkiye' nin kırsal kesimindeki ortaokullarda bulunan öğrencilerin, görsel matematik okuryazarlığı ile ilgili özyeterlik algılarını belirleyen bilimsel araştırma bulunmadığından bu araştırma okuryazarlıkların bütünleştirilmesi ve kırsalda matematik eğitimi alanındaki çalışmalara ışık tutması açısından öneme sahiptir. Bu doğrultuda kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algı düzeylerini tespit etmek amacıyla şu soruların cevabı aranmıştır;

1. Kırsal bölgelerde eğitim alan ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı öz-yeterlik algıları nasıldır?
2. Kırsal bölgelerde eğitim alan ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, cinsiyete göre anlamlı farklılık göstermekte midir?
3. Kırsal bölgelerde eğitim alan ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, sınıf seviyesine göre anlamlı farklılık göstermekte midir?

4. Kırsal bölgelerde eğitim alan ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, karne puanına göre anlamlı farklılık göstermekte midir?
5. Kırsal bölgelerde eğitim alan ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, okul öncesi eğitime göre anlamlı farklılık göstermekte midir?
6. Kırsal bölgelerde eğitim alan ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, mezun olunan ilkokula göre anlamlı farklılık göstermekte midir?
7. Kırsal bölgelerde eğitim alan ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, matematik öğretmeninin davranışına göre anlamlı farklılık göstermekte midir?
8. Kırsal bölgelerde eğitim alan ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, ebeveynlerinin davranışlarına göre anlamlı farklılık göstermekte midir?

Bu sorular çerçevesinde çözüm önerileri geliştirilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmadan elde edilen bulgular ve bulgular ışığında geliştirilen yorum ve önerilerin, MEB, uzmanlar, matematik öğretmenleri ve öğrencilerinin gözünde değerli olduğu düşünülmektedir.

Yöntem

Bu bölümde araştırma modeli, çalışma grubu, verilerin toplanması ve verilerin analizinde kullanılan yöntem ve teknikler ile ilgili bilgilere yer verilmiştir.

Araştırmanın Modeli

Eğitim alanı ile ilgili yapılan çalışmalar gösteriyor ki en sık kullanılan betimsel yöntem tarama çalışmasıdır. Bu durumun sebebi araştırmacıların, birey, grup veya ortamın özelliklerini özetlemesidir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2011). Yapılan çalışma da kırsal bölgelerdeki ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısını belirlemek amacıyla gerçekleştirilmiş olup, bu nedenle desen olarak tarama modeline dayalı bir betimsel araştırma olarak tasarlanmıştır. Tarama modeli, mevcut veya geçmişte mevcut olan bir durumu olduğu gibi tanımlamayı hedefleyen bir araştırma yaklaşımıdır. İncelenen olay, birey veya nesne, kendi bağlamı içinde ve mümkün olduğunca değişmeden tarif edilmeye çalışılır. Bunlara herhangi bir müdahalede bulunma veya değiştirme çabası gösterilmez (Karasar, 2014). Çalışmada nicel yöntem kullanılmış olup ölçme aracından yararlanılmıştır. Bu yaklaşımda, değişkenler arasındaki ilişki belirlenmeye çalışır ve sebepleri araştırılır. Araştırmanın tasarımı önceden belirlenir ve kabul edilmiş işlem adımlarını takip etmek önemlidir (Büyüköztürk, Kılıç Çakmak, Akgün, Karadeniz ve Demirel, 2011).

Çalışma Grubu

Araştırmanın çalışma grubunu 2023-2024 eğitim-öğretim yılında Balıkesir ili Karesi ilçesinde yer alan bir devlet ortaokulunda öğrenim görmekte olan 268 kadın ve 268 erkek olmak üzere toplam 536 ortaokul öğrencisi oluşturmaktadır. Bu ortaokulda bulunan öğrencilerin aileleri kırsal kesimden ve sosyoekonomik düzeyi düşük olan bireylerden oluşmaktadır. Öğrenciler aileleri tarafından takip ve kontrol edilmemektedir. Bu durumdan dolayı akademik anlamda başarı seviyesi düşük olan öğrenci sayısı fazladır. Öğrencilere çalışmayı uygulamadan önce sözlü olarak bilgi verilmiştir. Ayrıca öğrencilere uygulanacak olan ölçeğin toplanması ve değerlendirilmesi sürecinde yasal ve etik kurallara uygun davranılacağı konusunda açıklama yapılmıştır. Çalışmanın gönüllülük esasına dayalı olduğu söylenmiştir. Çalışmaya katılan öğrenciler 5., 6., 7. ve 8.sınıf olmak üzere toplam 26 şubeden oluşmaktadır. Çalışmada kullanılan ölçek, ilgili şubelerdeki öğrencilere uygulanmış, elde edilen cevaplar analiz edilerek sonuçlara ulaşılmıştır.

Verilerin Toplanması

Araştırmada nicel araştırma yöntemi kullanılmış olup katılımcılarla ilgili genel bilgiler edinmek amacıyla çalışmanın değişkenleriyle ilişkili düzenlenmiş bir "Kişisel Bilgi Formu" kullanılmıştır. Bu form, katılımcıların cinsiyet, sınıf seviyesi, karne puanı, mezun oldukları ilkokul, okul öncesi eğitim geçmişi, matematik öğretmeninin tutumu ve anne-baba tutumu gibi bilgilerini içermektedir. Öğrencilerden ders puanı için, en son matematik karne puanının olduğu aralığı işaretlemeleri gerektiği ifade edilmiştir. Sezer (2010) tarafından yürütülen araştırmada, düşük, orta ve yüksek düzeyde otoriter ebeveyn davranışlarının, öğrencinin kişilerle iletişimi ve kişisel değeri üzerinde belirgin farklara sebep olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Bu nedenle yapılan çalışmada da öğrencilerin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarında ebeveyn tutumlarının etkisi incelenmiştir. Öğretmen davranışlarının öğrencinin öğrenme süreçlerine ve öz değerlendirmelerine etkisi göz önüne alındığı için kişisel bilgi formuna öğretmen tutumuyla ilgili öğeler eklenmiştir.

Çalışmada ek olarak, öğrencilerin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısını değerlendirmek amacıyla Bekdemir ve Duran (2011)' ın geliştirmiş olduğu ölçek kullanılmıştır. Görsel Matematik Okuryazarlık Özyeterlik Algısı Ölçeği (GMOÖAÖ), otuz sekiz maddeden oluşan, "alan içeriği", "süreç" ve " kullanıldığı durumlar" olmak üzere üç farklı alt boyut içeren, .94 Cronbach alfa güvenirlik katsayısına sahip beşli Likert tipi güvenilir bir ölçektir. Ölçeğin 4., 14., 17., 31., 33., 36., 38. maddeleri alan içeriği boyutunu, 1., 2., 3., 5., 6., 7., 8., 9., 11., 13., 15., 16., 18., 19., 20., 21., 22., 24., 29., 35., 37. maddeleri süreç boyutunu ve 10., 12., 23., 25., 26., 27., 28., 30., 32., 34. maddeleri kullanıldığı durumlar boyutunu oluşturmaktadır.

Ölçekten minimum 38 puan, maksimum ise 190 puan alınabilmekte olup, öğrenciler aldıkları puana göre iyi, orta ve düşük olacak şekilde üç farklı kategoride değerlendirilmişlerdir. Puanlama sistemine göre, 148-190 puan aralığındaki gruplar iyi kategoride, 84-147 puan aralığındaki gruplar orta kategoride ve 38-83 puan aralığındaki gruplar kötü kategoride olarak tanımlanmıştır.

Verilerin Analizi

Çalışmada nicel verilerin analizinde, GMOÖAÖ' den elde edilen veriler SPSS 27 paket programı ile hesaplanmıştır. Ölçekten elde edilen işlenmemiş verileri analiz etmek için cevapların her birine sayısal değerler verilmiş ve veri tabanına işlenmiştir. Gruplardan elde edilen verilere betimleyici analiz yapılmış olup bu doğrultuda verilerin çarpıklık ve basıklık değerleri bulunmuştur. Verilerin analizine başlamadan önce, hangi istatistiksel testlerin uygulanacağını belirlemek için verilerin normal dağılım sergileyip sergilemediği değerlendirilmiştir. GMOÖAÖ' den elde edilen puanların çarpıklık ve basıklık değerleri Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. GMOÖAÖ Çarpıklık ve Basıklık İstatistikleri

Ölçekler	**n**	**Çarpıklık**	**Basıklık**
Alan İçeriği	536	-,005	-,224
Süreç	536	,021	-,431
Kullanıldığı Durumlar	536	-,110	-,516
GMOÖAÖ (Toplam)	536	,033	-,436

Normallik hakkında çarpıklık (skewness) ve basıklık (kurtosis) değerleri bilgi vermekte olup çarpıklığı -1, +1 değerleri arasında ise verilerin normal dağılımda olduğu söylenebilir (Büyüköztürk, 2005). Tablo 1 incelendiğinde, grupların tüm alt boyutlardan ve ölçeğin tümünden elde edilen puanların çarpıklık, basıklık değerlerinin -1 ile +1 arasında olduğu görülmektedir. Bu durum verilerin normal dağılıma uyduğunu göstermektedir. Yapılan araştırmadaki verilerin normal dağılım gösterdiği saptanmış olup bağımsız gruplar t testi ve tek yönlü varyans analizi (ANOVA) kullanılarak puan ortalamaları arasındaki farkın anlamlılığı ölçülmüştür.

Bulgular

Bu bölümde, araştırmanın alt problemleri ile ilgili toplanan veriler istatistiksel yöntemlerle analiz edilerek, elde edilen bulgular yorumlanmıştır.

Araştırmanın Birinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmada birinci alt problem olan "Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları nasıldır?" sorusunun cevabını bulmak için puan ortalamaları ve standart sapma değerleri hesaplanmıştır. GMOÖAÖ' den elde edilen bulgular Tablo 2'de verilmiştir.

Tablo 2. Ortaokul Öğrencilerinin GMOÖAÖ Puanları

Ölçek	**N**	**$\bar{X}$**	**ss**
Alan İçeriği	536	22,905	,186
Süreç	536	68,634	,758
Kullanıldığı Durumlar	536	34,243	,366
GMOÖAÖ (Toplam)	536	125,782	1,211

Tablo 2 incelendiğinde, ölçekte bulunan alan içeriği ($\bar{X}$=22,905; ss=,186), süreç ($\bar{X}$=68,634; ss=,758) ve kullanıldığı durumlar ($\bar{X}$=34,243; ss=,366) alt boyutlarından elde edilen puan ortalamaları ve ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarının ($\bar{X}$=125,782; ss=1,211) "orta düzey" puan aralığında olduğu görülmektedir.

Araştırmanın İkinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmada ikinci alt problem olan "Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları cinsiyete göre anlamlı olarak farklılaşmakta mıdır?" sorusunun cevabını bulmak için uygulanan bağımsız gruplar t-testi sonuçları Tablo 3'te verilmiştir.

Tablo 3. GMOÖAÖ Puanlarının Cinsiyete Göre Farklılığına İlişkin t-Testi Sonuçları

Ölçek	Cinsiyet	n	$\bar{X}$	SS	t	p
Alan İçeriği	**Kadın**	268	23,082	4,788	,951	,342
	Erkek	268	22,728	3,788		
Süreç	**Kadın**	268	68,888	18,566	,335	,738
	Erkek	268	68,381	16,481		
Kullanıldığı Durumlar	**Kadın**	268	34,914	8,788	1,841	,066
	Erkek	268	33,571	8,087		
GMOÖAÖ (Toplam)	**Kadın**	268	126,884	29,809	,911	,363
	Erkek	268	124,679	26,134		

*p<,05

Tablo 3 incelendiğinde, ölçekte bulunan alan içeriği (t=,951; p>,05), süreç (t=,335; p>,05), kullanıldığı durumlar (t=1,841; p>,05) alt boyutlarından ve ölçeğin tümünden (t=,911; p>,05) elde edilen toplam puanların, cinsiyete göre istatistiksel olarak anlamlı bir şekilde farklılaşmadığı görülmektedir.

Araştırmanın Üçüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmada üçüncü alt problem olan "Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, sınıf düzeyine göre anlamlı olarak farklılaşmakta mıdır?" sorusunun cevabını bulmak için uygulanan tek yönlü varyans analizi (ANOVA) sonuçları Tablo 4'te verilmiştir.

Tablo 4. GMOÖAÖ Puanlarının Sınıf Düzeyine Farklılığına İlişkin ANOVA Sonuçları

Ölçek	Kaynak	Kareler Toplamı	S.D.	Kareler Ortalaması	F	p
Alan İçeriği	**Gruplar Arası**	114,448	3	38,149	2,060	,105
	Grup İçi	9853,699	532	18,522		
	Genel	9968,147	535			
Süreç	**Gruplar Arası**	4599,395	3	1533,132	5,098	,002*
	Grup İçi	159992,933	532	300,739		
	Genel	164592,328	535			
Kullanıldığı Durumlar	**Gruplar Arası**	535,191	3	178,397	2,511	,058
	Grup İçi	37789,279	532	71,032		
	Genel	38324,470	535			
GMOÖAÖ (Toplam)	**Gruplar Arası**	10197,974	3	3399,325	4,410	,004*
	Grup İçi	410059,487	532	770,325		
	Genel	420257,461	535			

*p<,05

Tablo 4 incelendiğinde, ölçekte bulunan süreç (F=5,098; p<,05) alt boyutundan ve ölçeğin tümünden (F=4,410; p<,05) elde edilen toplam puanların, sınıf düzeyine göre istatistiksel olarak anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir. Sınıf düzeyine göre oluşan bu anlamlı farkın hangi sınıflar arasında olduğunu gözlemleyebilmek amacıyla yapılan Scheffe testi sonuçlarına göre, süreç alt boyutunda 8.sınıflar ile diğer tüm sınıfların arasında, alt sınıfların lehine anlamlı bir farklılaşma tespit edilmiştir. Yine ölçeğin tümünden elde edilen toplam puanlarda da 8.sınıflar ile 6.sınıflar haricindeki diğer tüm alt sınıflar arasında alt sınıfların lehine anlamlı bir farklılaşma ortaya çıkmıştır. Ölçeğin alan içeriği (F=2,060; p>,05) ve kullanıldığı durumlar (F=2,511; p>,05) alt boyutlarında ise istatistiksel olarak anlamlı bir farklılaşma gözlenmemiştir.

Araştırmanın Dördüncü Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmada dördüncü alt problem olan "Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları karne puanına göre anlamlı olarak farklılaşmakta mıdır?" sorusunun cevabını bulmak için uygulanan tek yönlü varyans analizi (ANOVA) sonuçları Tablo 5'te verilmiştir.

Tablo 5. GMOÖAÖ Puanlarının Karne Puanına Göre Farklılığına İlişkin ANOVA Sonuçları

Ölçek	Kaynak	Kareler Toplamı	S.D.	Kareler Ortalaması	F	p
Alan İçeriği	Gruplar Arası	1073,301	4	268,325	16,018	<,001*
	Grup İçi	8894,846	531	16,751		
	Genel	9968,147	535			
Süreç	Gruplar Arası	47909,930	4	11977,482	54,507	<,001*
	Grup İçi	116682,399	531	219,741		
	Genel	164592,328	535			
Kullanıldığı Durumlar	Gruplar Arası	8244,450	4	2061,113	36,385	<,001*
	Grup İçi	30080,020	531	56,648		
	Genel	38324,470	535			
GMOÖAÖ (Toplam)	Gruplar Arası	116979,262	4	29244,815	51,204	<,001*
	Grup İçi	303278,199	531	571,145		
	Genel	420257,461	535			

*p<,05

Tablo 5 incelendiğinde, ölçekte bulunan alan içeriği (F=16,018; p<,001), süreç (F=54,507; p<,001), kullanıldığı durumlar (F=36,385; p<,001) alt boyutlarından ve ölçeğin tümünden (F=51,204; p<,001) elde edilen toplam puanların, karne puanına göre istatistiksel olarak anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir. Karne puanına göre oluşan bu anlamlı farkın hangi sınıflar arasında olduğunu gözlemleyebilmek amacıyla yapılan Scheffe testi sonuçlarına göre, alan içeriği alt boyutu, kullanıldığı durumlar alt boyutu ve ölçeğin tümünden elde edilen puanlarda, 85-100 puan aralığı ile diğer tüm alt puan aralıkları arasında; 70-84 puan aralığı ile 45-54 puan aralığı arasında, yüksek puan aralığı lehine anlamlı bir farklılaşma ortaya çıkmıştır. Süreç alt boyutunda ise 85-100 puan aralığı ile diğer tüm alt puan aralıkları arasında; 70-84 puan aralığı ile 55-69 puan aralığı haricindeki diğer tüm puan aralıkları ile; 55-69 puan aralığı ile 45-54 puan aralığı arasında, yüksek puan alan grupların lehine anlamlı bir farklılaşma ortaya çıkmıştır.

Araştırmanın Beşinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmada beşinci alt problem olan "Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları okul öncesi eğitime göre anlamlı olarak farklılaşmakta mıdır?" sorusunun cevabını bulmak için uygulanan bağımsız gruplar t-testi sonuçları Tablo 6'da verilmiştir.

Tablo 6. GMOÖAÖ Puanlarının Okul Öncesi Eğitime Göre Farklılığına İlişkin t-Testi Sonuçları

Ölçek	Okul Öncesi Eğitim	n	$\bar{X}$	SS	t	p
Alan İçeriği	Alan	448	22,989	4,377	1,016	,310
	Almayan	88	22,477	3,991		
Süreç	Alan	448	69,530	17,806	2,952	,004*
	Almayan	88	64,080	15,417		
Kullanıldığı Durumlar	Alan	448	34,574	8,558	2,050	,041*
	Almayan	88	32,557	7,798		
GMOÖAÖ (Toplam)	Alan	448	127,092	28,450	2,685	,008*
	Almayan	88	119,114	24,862		

*p<,05

Tablo 6 incelendiğinde, ölçekte bulunan süreç (t=2,952; p<,05) alt boyutu, kullanıldığı durumlar (t=2,050; p<,05) alt boyutu ve ölçeğin tümünden (t=2,685; p<,05) elde edilen toplam puanların, okul öncesi eğitim alanlar lehine istatistiksel olarak anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir. Alan içeriği (t=1,016; p>,05) alt boyutunda ise istatistiksel olarak anlamlı bir farklılık gözlenmemiştir.

Araştırmanın Altıncı Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmada altıncı alt problem olan "Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları mezun olunan ilkokula göre anlamlı olarak farklılaşmakta mıdır?" sorusunun cevabını bulmak için uygulanan tek yönlü varyans analizi (ANOVA) sonuçları Tablo 7'de verilmiştir.

Tablo 7.GMOÖAÖ Puanlarının Mezun Olunan İlkokula Göre Farklılığına İlişkin ANOVA Sonuçları

Ölçek	Kaynak	Kareler Toplamı	S.D.	Kareler Ortalaması	F	p
Alan İçeriği	Gruplar Arası	12,065	3	4,022	,215	,886
	Grup İçi	9956,083	532	18,714		
	Genel	9968,147	535			
Süreç	Gruplar Arası	832,558	3	277,519	,902	,440
	Grup İçi	163759,771	532	307,819		
	Genel	164592,328	535			
Kullanıldığı Durumlar	Gruplar Arası	273,016	3	91,005	1,272	,283
	Grup İçi	38051,454	532	71,525		
	Genel	38324,470	535			
GMOÖAÖ (Toplam)	Gruplar Arası	2348,960	3	782,987	,997	,394
	Grup İçi	417908,501	532	785,542		
	Genel	420257,461	535			

*p<,05

Tablo 7 incelendiğinde, ölçekte bulunan alan içeriği (F=,215; p>,05), süreç (F=,902; p>,05), kullanıldığı durumlar (F=1,272; p>,05) alt boyutlarından ve ölçeğin tümünden (F=,997; p>,05) elde edilen toplam puanların, mezun olunan ilkokula göre istatistiksel olarak anlamlı bir şekilde farklılaşmadığı görülmektedir.

Araştırmanın Yedinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmada yedinci alt problem olan "Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları matematik öğretmeni tutumuna göre anlamlı olarak farklılaşmakta mıdır?" sorusunun cevabını bulmak için uygulanan bağımsız t testi sonuçları Tablo 8'de verilmiştir.

Tablo 8. GMOÖAÖ Puanlarının Matematik Öğretmeni Tutumuna Göre Farklılığına İlişkin t-Testi Sonuçları

Ölçek	Öğretmen Tutum	n	$\bar{X}$	SS	t	p
Alan İçeriği	**Demokratik**	466	22,940	4,342	,485	,628
	Otoriter	70	22,671	4,166		
Süreç	**Demokratik**	466	69,307	17,824	2,628	,010*
	Otoriter	70	64,157	14,869		
Kullanıldığı Durumlar	**Demokratik**	466	34,487	8,496	1,729	,084
	Otoriter	70	32,614	8,117		
GMOÖAÖ (Toplam)	**Demokratik**	466	126,734	28,433	2,278	,025*
	Otoriter	70	119,443	24,405		

*p<,05

Tablo 8 incelendiğinde, ölçekte bulunan süreç (t=2,628; p<,05) alt boyutu ve ölçeğin tümünden (t=2,278; p<,05) elde edilen toplam puanların, demokratik tutum sergileyen matematik öğretmenleri lehine anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir. Alan içeriği (t=,485; p>,05) alt boyutu ve kullanıldığı durumlar (t=1,729; p>,05) alt boyutunda ise istatistiksel olarak anlamlı bir farklılaşma gözlenmemiştir.

Araştırmanın Sekizinci Alt Problemine İlişkin Bulgular

Araştırmada sekizinci alt problem olan “Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları anne-baba tutumuna göre anlamlı olarak farklılaşmakta mıdır?” sorusunun cevabını bulmak için uygulanan tek yönlü varyans analizi (ANOVA) sonuçları Tablo 9’da verilmiştir.

Tablo 9. GMOÖAÖ Puanlarının Anne-Baba Tutumuna Göre Farklılığına İlişkin ANOVA Sonuçları

Ölçek	Kaynak	Kareler Toplamı	S.D.	Kareler Ortalaması	F	p
Alan İçeriği	Gruplar Arası	106,763	2	53,381	2,885	,057
	Grup İçi	9861,385	533	18,502		
	Genel	9968,147	535			
Süreç	Gruplar Arası	1747,740	2	873,870	2,860	,058
	Grup İçi	162844,589	533	305,525		
	Genel	164592,328	535			
Kullanıldığı Durumlar	Gruplar Arası	413,580	2	206,790	2,907	,055
	Grup İçi	37910,890	533	71,127		
	Genel	38324,470	535			
GMOÖAÖ (Toplam)	Gruplar Arası	5229,516	2	2614,758	3,358	,036*
	Grup İçi	415027,945	533	778,664		
	Genel	420257,461	535			

*p<,05

Tablo 9 incelendiğinde, ölçeğin tümünden (F=3,358; p<,05) elde edilen toplam puanların, anne-baba tutumuna göre istatistiksel olarak anlamlı bir şekilde farklılaştığı görülmektedir. Anne-baba tutumuna göre oluşan bu anlamlı farkın hangi sınıflar arasında olduğunu gözlemleyebilmek amacıyla yapılan LSD testinin sonuçlarına göre, demokratik tutum ile otoriter tutum arasında, demokratik tutum sergileyen anne-babaların lehine anlamlı bir farklılaşma tespit edilmiştir. Ölçeğin alan içeriği ($F=2,885$; $p>,05$), süreç ($F=2,860$; $p>,05$) ve kullanıldığı durumlar ($F=2,907$; $p>,05$) alt boyutlarında ise istatistiksel olarak anlamlı bir farklılaşma gözlenmemiştir.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

Bu bölümde, GMOÖAÖ' den elde edilen verilerin istatistiksel analiz sonuçları detaylı olarak sunulmuş, ilgili alan yazındaki mevcut sonuçlarla tartışılmış ve konu ile ilgili muhataplara yönelik önerilere yer verilmiştir.

Sonuç ve Tartışma

Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları ile ilgili elde edilen bulgular değerlendirildiğinde, öğrencilerin orta düzey matematik okuryazarlığı özyeterlik algısına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. İlgili alan yazın incelendiğinde Fırat ve Bal (2021)' in yapmış oldukları çalışmada da benzer olarak görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları ile modelleme yeterliklerinin orta düzeyde olduğu belirlenmiş olup yapılan araştırmayı desteklemektedir. Ayrıca Duran ve Bekdemir (2011)' in yaptıkları çalışmada görsel matematik başarı puanlarının, okulun bulunduğu yerin sosyo-ekonomik düzeyine göre anlamlı olarak farklılaştığı sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmaya katılan öğrenciler kırsal kesimde bulunan aileler oldukları için sosyo-ekonomik düzeyleri orta ya da alt seviyede bulunmaktadır. Ailelerin genellikle eğitim seviyelerinin düşük olması, öğrencilerin matematiksel yeteneklerini geliştirmelerine yardımcı olma konusunda sınırlılıklar getirebilir. Ailelerin çocuklarının eğitimine yönelik bilinç düzeyi ve destekleri onların görsel matematik okuryazarlıkları üzerinde önemli bir etken olabilir.

Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarının cinsiyete göre farklılaşmadığı sonucu elde edilmiştir. Benzer olarak Duran ve

Bekdemir (2011)' in yaptıkları çalışmada da görsel matematik başarı puanlarının cinsiyete göre anlamlı olarak farklılaşmadığı sonucuna ulaşılmış olup yapılan çalışmayı desteklemektedir.

Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algıları, sınıf düzeyine göre farklılaşıp farklılaşmadığı ile ilgili bulgular değerlendirildiğinde, alt sınıfların lehine anlamlı bir farklılaşmanın olduğu tespit edilmiştir. İlgili alan yazın incelendiğinde Deveci ve Karademir (2018) tarafından gerçekleştirilen araştırma sonuçlarına göre, ortaokul öğrencilerinin matematik öz bildirim ve görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısı düzeyleri sınıf seviyesine göre çeşitlilik göstermektedir. Bu çalışma da yapılan araştırmayı destekler niteliktedir. Ayrıca alt sınıf seviyelerinde matematik uygulamaları, zekâ oyunları gibi derslerin olması görsel matematik okuryazarlığını destekleyen etkileşimli oyunlar, aktiviteler ve uygulamalar yapılmasına olanak sağlamaktadır. Bu durum öğrencilerin alt sınıflarda görsel matematik okuryazarlık düzeylerinin yüksek çıkmasının sebebi olabilir. Ayrıca LGS sınavına girecek olan 8. sınıf öğrencilerinin yaşadıkları kaygıdan ötürü ölçeği alt sınıflara göre daha eleştirel şekilde cevaplandırdıkları söylenebilir.

Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarının karne puanına göre farklılaşma durumuna ilişkin bulgular değerlendirildiğinde, karne puanı yüksek olan öğrencilerin lehine anlamlı bir farklılığın olduğu sonucuna varılmıştır. Nitekim ilgili alan yazın incelendiğinde İlhan ve Tutak (2015) tarafından gerçekleştirilen araştırmanın sonuçlarına göre, öğrencilerin görsel matematik okuryazarlıkları ile geometri başarıları arasında pozitif yönde bir ilişki bulunmuş olup yapılan çalışmayı destekler niteliktedir. Yine görsel matematik okuryazarlığına sahip olan bireyler, matematikle ilgili görsel temsilleri daha iyi anlama ve yorumlama eğiliminde olabilirler. Bu da özyeterlik algılarını artırabilir. Aynı zamanda, yüksek özyeterlik algısına sahip bireyler, matematikle ilgili konulara daha fazla özgüvenle yaklaşabilir ve bu da genel matematik başarılarına olumlu bir etki yapabilir. Bu durum matematik başarısı yüksek olan öğrencilerin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarının yüksek çıkmasının kanıtı olarak gösterilebilir.

Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarının okul öncesi eğitime göre farklılaşma durumuna yönelik bulgular değerlendirildiğinde okul öncesi eğitim alan öğrenciler lehine anlamlı bir farklılaşmanın olduğu tespit edilmiştir. İlgili alan yazın incelendiğinde Uysal ve Yenilmez (2011) tarafından gerçekleştirilen çalışmada okul öncesi eğitim almamış olan öğrencilerin, matematik okuryazarlığı açısından en düşük yeterlik düzeyi olan birinci düzeyde daha fazla yer aldığı belirlenmiştir. Ancak, çalışma grubunun matematik okuryazarlığında en üst yeterlik düzeyi olan beşinci düzeyde, okul öncesi eğitim almamış öğrencilerin başarı gösteremedikleri ortaya çıkmıştır. Bu durum yapılan araştırmayı desteklemektedir. Aynı zamanda okul öncesi eğitimde matematikle ilgili görsel unsurları kullanarak yapılan etkinlikler, öğrencilere problem çözme becerileri kazandırabilir, matematiksel kavramları görsel olarak ifade edebilme yeteneklerini artırabilir ve öğrencilere matematikle olumlu bir ilişki geliştirmelerine yardımcı olabilir.

Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarının mezun olunan ilkokula göre farklılaşmadığı sonucu elde edilmiştir. Öğrencilerin öğrenim görmekte oldukları ortaokulun üç farklı ilkokul alım bölgesi bulunmaktadır ve bu ilkokulların bulunduğu bölgeler de kırsal bölgedir. Farklılığın olmamasının sebebi bu durumdan kaynaklı olabilir. Buna rağmen bu devlet ortaokuluna bir grup öğrenci de tayin, taşınma vb. sebeplerden ötürü kaydolmuş olup aileleri kırsal kesimden değildir. Bu öğrencilerin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algı puanları kırsal bölgeden gelen öğrencilere nazaran anlamlı olmasa da yüksek çıkmıştır. Yine Uysal ve Yenilmez (2011) tarafından gerçekleştirilen çalışmanın sonucunda da aile aylık gelir durumu ve anne-baba eğitim durumu değişkenleri arasında anlamlı düzeyde ilişki olduğu gözlemlenmiş olup yapılan çalışmayı destekler niteliktedir.

Kırsalda öğrenim gören ortaokul öğrencilerinin görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarının öğretmen tutumuna göre farklılaşma durumuna yönelik bulgular değerlendirildiğinde, demokratik tutum sergileyen matematik öğretmenleri lehine anlamlı bir farklılaşmanın olduğu sonucuna varılmıştır. Benzer olarak Deveci ve Karademir (2018) tarafından gerçekleştirilen araştırmanın sonuçlarında da ortaokul öğrencilerinin matematik öz bildirim ve görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algısı demokratik tutum sergileyen öğretmenler lehine anlamlı olduğu tespit edilmiş olup yapılan çalışmayı desteklemektedir. Aynı zamanda öğretmenlerin öğrencileriyle etkileşimde demokratik bir tutum sergilemeleri öğrencilerin özgüvenlerini artırabilir. Bu durum öğrencilerin matematikle daha olumlu bir ilişki kurmalarına ve matematiksel öğrenme süreçlerine daha istekli bir şekilde katılmalarına katkıda bulunarak görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarının artmasına sebep olabilir.

Demokratik tutum sergileyen anne-babaların çocuklarının görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algı puanlarının daha yüksek düzeyde olduğu sonucuna varılmıştır. Uysal ve Yenilmez (2011) ile Deveci ve Karademir (2018) tarafından gerçekleştirilen çalışmalarda da anne-baba tutumlarında demokratik tutum lehine anlamlı düzeyde farklılaşmalar bulunmuş olup yapılan çalışmayı desteklemektedir. Ebeveynlerin demokratik bir tutum sergilemeleri, çocukların kendi düşüncelerini ifade etme yeteneklerini geliştirmelerine, sorunları çözme becerilerini güçlendirmelerine ve genel olarak daha özgüvenli bireyler olmalarına yardımcı olabilir. Bu durum onların matematikle ilgili konularda daha rahat hissetmelerini, sorular sormalarını ve kendi çözüm stratejilerini geliştirmelerini teşvik edebilir ve dolayısıyla görsel matematik okuryazarlığı özyeterlik algılarını güçlendirebilir.

Öneriler

Bu çalışma kırsal kesimde bulunan ortaokul öğrencilerine uygulanmıştır. Çalışma kent merkezinde ve sosyoekonomik düzeyi yüksek olan ortaokul öğrencilerine uygulanarak, yapılan bu çalışma sonuçları ile karşılaştırılabilir. Yine araştırmanın benzeri farklı öğrenim düzeyindeki öğrencilere uygulanabilir.

Okul programlarına matematik derslerinden bağımsız olacak şekilde görsel matematik okuryazarlığının geliştirilmesine yönelik içinde interaktif matematik etkinlik ve aktivitelerini barındıran seçmeli dersler eklenebilir. Matematik ve görsel sanatları birleştirerek sanat projeleri aracılığıyla matematiksel kavramları görselleştirme imkânı sağlanabilir.

Konunun uzmanları ve rehber öğretmenler tarafından ebeveyn ve öğretmenlere demokratik tutumlarını geliştirmeye yönelik hizmet içi eğitimler ve seminerler düzenlenebilir. Ayrıca anne ve babalar, ebeveynlik becerilerini güçlendiren konferanslara veya eğitim programlarına yönlendirilebilir.

Kırsal kesimde bulunan öğrencilerin görsel matematik okuryazarlık düzeylerini arttırmak için öğretmenler, derslerde matematikle ilgili günlük hayatta karşılaşılan örnekleri kullanarak gerçek dünya problemleri üzerinden matematiksel düşünceyi teşvik edebilirler. Bunun yanında matematiksel kavramları görsel araçlar ve somut materyallerle destekleyebilirler. Ayrıca öğretmenler derslerde bilgisayar tabanlı matematik uygulamaları, çevrimiçi kaynaklar veya artırılmış gerçeklik uygulamaları kullanarak görsel matematikle ilgili interaktif oyunlar ve aktiviteler düzenleyebilirler.

Kaynakça

Altun, A. (2005). *Gelişen Teknolojiler ve Yeni Okuryazarlıklar.* Anı Yayıncılık.

Andersone, E. (2002). Enhancing Visual Literacy Through Cognitive Activities, *Proceedings of the 2002 ASEE/SEF/TUB Colloquium Carnegie Mellon University, American Society for Engineering Education.*

Aşıcı, M. (2009). Kişisel ve sosyal bir değer olarak okuryazarlık. *Değerler Eğitimi Dergisi*, 7(17), 9-26.

Büyüköztürk, Ş., Kılıç Çakmak, E., Akgün, Ö. E., Karadeniz, Ş. & Demirel, F. (2011). *Bilimsel araştırma yöntemleri*. Ankara: Pegem Akademi.

Chauvin, B. A. (2003). Visual or media literacy. *Journal of Visual Literacy, 23* (2), 119-128.

Çilingir, E. (2015). *Gerçekçi Matematik Eğitimi Yaklaşımının İlkokul Öğrencilerinin Görsel Matematik Okuryazarlığı Düzeyine ve Problem Çözme Becerilerine Etkisi*, [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü: Adana].

Debes, J. L. (1968). Some Foundations For Visual Literacy. *Audiovisual Instruction.*13(9), 961-964.

Deveci, Ö. & Aldan Karademir, Ç. (2018). Ortaokul Öğrencilerinin Matematik Öz bildirimleri ile Görsel Matematik Okuryazarlığı Öz-yeterlik Algıları . *Eğitim Kuram ve Uygulama Araştırmaları Dergisi*, 4(3), 33-49. Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/ekuad/issue/41379/500201

Duran, M. (2011). *İlköğretim 7. Sınıf Öğrencilerinin Görsel Matematik Okuryazarlığı Özyeterlik Algıları ile Görsel Matematik Başarıları Arasındaki İlişki*, [Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü: Erzincan].

Ersoy, Y. (2003). M*atematik okur yazarlığı-II: hedefler, geliştirilecek yetiler ve beceriler*. http://www.matder.org.tr

Ev Çimen, E. & Aygüner, E. (2016). Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Görsel Matematik Okuryazarlığı Öz Yeterlik Algıları ile Gerçek Performanslarının İncelenmesi. *İlköğretim Online*, 675-696 . DOI: 10.17051/ilkonline.2018.419026

Feinstein, H. & Hagerty, R. (1994). *Visual literacy in general educationatthe University of Cincinnati*.In Visual literacy in the digital age: Selected readings from the [25th] Annual Conference of the International Visual Literacy Association. Rochester, New York, October 13-17, 1993; (ERIC Document No. ED 370 602).

Fırat, B. F. (2021) *Matematiksel Modelleme Etkinliklerinin Altıncı Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel Modelleme Yeterliklerine, Görsel Matematik Okuryazarlığı Algılarına ve Okuduğunu Anlama Becerilerine Etkisi* (Tez No. 662517) [Yüksek lisans tezi, Çukurova Üniversitesi-Adana]. Yükseköğretim Kurulu Ulusal Tez Merkezi.

Hortin, J. A. (1980). *Visual literacy and visual thinking*. (ERIC Document No: ED 214 522). IVLA. (2004). *What is "visual literacy"?*. from the World Wide Web: http://www.ivla.org/org_what_vis_lit.htm

İlhan, A. (2015). *İlköğretim Matematik Öğretmen Adaylarına Yönelik Görsel Matematik Okuryazarlığı Ölçeğinin Geliştirilmesi ve Görsel Matematik Okuryazarlığı ile Geometri Başarıları Arasındaki İlişkisinin İncelenmesi*, [Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Fırat Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü: Elâzığ].

İpek, İ. (2003). Bilgisayarlar, görsel tasarım ve görsel öğrenme stratejileri. *The Turkish Online Journal of Educational Technology. 2*(3).

Karasar, N. (2014). *Bilimsel Araştırma Yöntemi*. Ankara: Nobel Yayıncılık.

Kellner, D. (1998). Multiple literacies and critical pedagogy in a multicultural society. *Educational Theory. 48*(1), 103-122.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston: NCTM Publications.

OECD (2021a). 21st-Century readers: Developing literacy skills in a digital world. PISA, *OECD Publishing. Paris.*

Reinking, D., Mckennam, C., Labbo, L. D. & Kieffer, D. (1998). *Handbook of technology and literacy: transformations in a post-typographic world.*Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sanalan, V. A., Sülün, A. & Çoban, A. (2007). Görsel Okuryazarlık. *Erzincan Eğitim Fakültesi Dergisi*, *9*(2), 33-47.

Sezer, Ö. (2010). Ergenlerin kendilik algılarının anne baba tutumları ve bazı faktörlerle ilişkisi. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, *7(1).*

Sims, E., O'Leary, R., Cook, J. & Butland, G. (2002). *Visual literacy: What is it and do we need it to use learning technologies effectively?* Paper presented at the annual conference of the Australasian Society for Computers in Learning in Tertiary Education, Auckland.

Stacey, K. & Turner, R. (2015). *The evolution and key concepts of the PISA mathematics frameworks.* İn assessing mathematical literacy (pp. 5-33).

Tekin, B. & Tekin, S. (2004). *Matematik öğretmen adaylarının matematiksel okuryazarlık düzeyleri üzerine bir araştırma.* Matematikçiler Derneği. *from the World Wide Web:* http://matder.org.tr

Uysal, E. & Yenilmez, K. (2011). Sekizinci Sınıf Öğrencilerinin Matematik Okuryazarlığı Düzeyi . *Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Sosyal Bilimler Dergisi* , 12 (2) , 1-15 . Retrieved from https://dergipark.org.tr/tr/pub/ogusbd/issue/11000/131632

BÖLÜM II

İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının İspata Yönelik Algısal, Matematiksel, Öğretimsel ve Epistemolojik Görüşlerinin Analizi[1]

Muhammet DORUK[2]
Abdullah KAPLAN[3]

Giriş

İspat, bir şeyin doğru olduğunu gösteren bilgi ve dokümanlar, bir iddianın doğru ya da gerçek olup olmadığını test etme süreci (Oxford advenced learner’s dictionary, 2010), bir şeyin varlığını ve doğruluğunu gösteren bir gerçek ya da bir kısım bilgi (Cambridge advenced learner’s dictionary, 2013) olarak tarif edilmiştir. Türkçe Süzlük’te ise ispat, tanıt ve kanıt göstererek bir

---

[1] Bu çalışma birinci yazarın ikinci yazar danışmanlığında hazırladığı doktora tez çalışmasını bir bölümü olup, 9. Uluslararası Avrasya Eğitim Araştırmaları (EJER) kongresi’nde sözlü bildiri olarak sunulmuştur.

[2] Doç. Dr., Hakkari Üniversitesi
[3] Prof. Dr, Atatürk Üniversitesi

şeyin gerçek yönünü ortaya çıkarma olarak tanımlanmıştır (TDK, 2015). Matematikçiler ve matematik eğitimcileri ispatlara farklı anlamlar yükleyerek ve ispatın farklı özelliklerine vurgu yaparak tanımlamaya çalışmışlardır.

Bazı araştırmacıların yaptıkları ispat tanımlarında ispatın sözlük anlamından farklı olarak, matematiksel ispatın matematiksel bir ifadenin ya da önermenin doğruluğunu veya yanlışlığını göstermek olduğu açıkça vurgulanmıştır. Yıldırım'a (2014) göre ispat, bir yargı sav ya da sonucun doğruluğunu (ya da yanlışlığını) yeterli kanıt göstererek kabul ettirme çabasıdır. Baki'ye (2014) göre matematiksel ispatların amacı, iddia edilenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlamaktır. Bu her durum ve koşulda iddianın doğru olduğunun gösterilmesiyle olur. Başka bir deyişle iddianın, örüntünün bütün şartlarda genellenebilirliğinin gösterilmesiyle ispat tamamlanmış olur. Weber'e (2005) göre matematiksel ispat, ispatı yapan kişinin varsayımlar, aksiyomlar, tanımlar gibi önceki bilgiler ile sunduğu ve arzu edilen sonuca ulaşılıncaya kadar teoremlerin uygulanması ve önceki elde edilen gerçeklerin hatırlanması gibi çıkarım kurallarının uygulanmasının istendiği matematiksel bir aktivitedir. Güven ve diğerleri (2005) matematikçilerin gözünde ispatın, öncülleri de kullanarak mantıksal çıkarımlar yoluyla bir ifadenin doğruluğunu ya da yanlışlığını kanıtlama olarak görülebileceğini ifade etmişlerdir. Fitzgerald'a (1996) göre ise ispat, bir doğrunun veya gerçeğin kanıtlar ışığında kabullenilmesidir (Akt., Güler, 2013).

Matematik eğitimcileri matematiksel ispatın öğrenciler üzerinde birçok olumlu etkisi olduğunu ifade etmişlerdir. Matematiksel ispatları matematiksel kavramların anlaşılmasında, matematiksel bilgilerin gelişip olgunlaşmasında önemli bir araç ve ana eleman olarak görmüşlerdir (Knuth, 1999; Ross, 1998; Schoenfeld, 1994, 2009; Stylianides, 2007; Tucker, 1999). Matematiksel ispatlar, matematiği daha anlamlı öğrenmenin bir yoludur (Hersh, 1993; Tucker, 1999). Matematiksel ispatlar öğrencilere karşılaştıkları problemlerin çözümü için stratejiler, yöntemler, araçlar ve kavramlar gibi önemli matematiksel bileşenler sunar (Mariotti ve Balacheff, 2008; Rav, 1999). Problem çözümünde ispatların sağladığı bu yeni matematiksel anlayış, kavramsal ilişkiler ve yöntemler, ispatlara matematiksel önermelerin doğruluğunu göstermekten daha çok değer kazandırır (Hanna ve Barbeau, 2008). Ayrıca, matematiksel ispatlar matematikçilerin yaptıklarının öğrenciler tarafından anlaşılmasını sağlayan bir araçtır (İmamoğlu, 2010; Tucker, 1999). Dede ve Karakuş (2014) ispat yapma sürecinde öğrencilerin denemeler yaparak keşfetme sürecine girdiklerini, matematiğin estetik yönünün fark ettiklerini ve analitik düşünme becerilerini geliştirebileceklerini ifade etmişlerdir. Güven ve diğerleri (2005) de ispatlama etkinlikleri yoluyla, öğrencilerin bir yandan matematiğin aksiyomatik yapısını tanıma fırsatı yakalarken bir yandan da muhakeme becerilerini geliştirebileceklerini dile getirmişlerdir.

Araştırmacılar tarafından ispatın matematik ve matematik eğitimi için önemi vurgulanmasına rağmen üniversite öğrencileri ve matematik öğretmenlerinin ispat yapmada (Cusi ve Malara, 2007; Doruk ve Kaplan, 2015b; Ko ve Knuth, 2009; Weber, 2001), ters örnek üretmede (Riley, 2003; Zaslavsky ve Peled, 1996) ve başkaları tarafından yapılan ispatların doğruluğunu değerlendirmede (Alcock ve Weber, 2005; Doruk ve Kaplan, 2013b; Knuth, 2002; Martin ve Harel, 1989; Morris, 2002; Segal, 2000; Selden ve Selden, 2003; Uygan, Tanışlı ve Köse, 2014) başarısız oldukları tespit edilmiştir. Öğrencilerin bu başarısızlıklarını tespit eden araştırmacılar, öğrencilerin ispatlama sürecine odaklanmışlardır. Öğrencilerin ispatlama sürecine etki eden faktörleri bulmaya çalışmışlardır. Bu bağlamda Weber (2001) öğrencilerin ispat yaparken yaptıkları hataları anlayabilmek için öğrencilerin ispatlama süreçlerinin incelenmesinin gerekli olduğunu ifade etmiştir.

İspatlar, üniversite matematik derslerinin merkezinde yer almasına rağmen öğrencilerin bazılarının ispatın ne olduğuna yönelik görüşlerinin yetersiz olduğu ve ispatın ne olduğuna yönelik bir görüş birliği sağlayamadıkları tespit edilmiştir (Jones, 2000; Moore; 1994; Raman, 2003). Birçok araştırmacı, matematik öğretmeni adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşlerinin oluşmadığı ya da görüşlerinin yetersiz olduğunu tespit etmişlerdir (Jones, 2000; Doruk ve Güler, 2014; Kayagil, 2012; Moralı, Uğurel, Türnüklü ve Yeşildere, 2006). Moralı ve diğerleri (2006) bu durumun, öğretmen adaylarının ispat yapmanın matematik ve matematik eğitimi açısından önemini bilmediklerini gösterdiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının çoğunun ispatları anlamaya ve yapmaya yönelik özgüvenlerinin düşük olduğu tespit edilmiştir (Doruk ve Kaplan, 2013a; Doruk ve Güler, 2014). Ek olarak, matematik öğretmeni adaylarının ispatın gerekliliğine ve matematiksel anlamda kendilerine sağladığı faydalara yönelik olumsuz görüşlerinin olduğu belirtilmiştir (Doruk ve Kaplan, 2013a, 2015a, 2015b; Moralı vd., 2006). Yapılan araştırmalarda matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşleri ile ispat yapma becerilerinin ilişkili olduğu görülmüştür (Bayazıt, 2009; Doruk ve Kaplan, 2015a; Güler, Özdemir ve Dikici, 2012; İmamoğlu, 2010). Moore (1994) ispat ve matematiğe yönelik algıların öğrencilerin ispat yapma becerileri üzerinde etkili olduğunu belirtmiş, üniversite seviyesindeki öğrencilerin ispat yaparken karşılaştıkları güçlüklerin arasında olduğunu ifade etmiştir. Furinghetti ve Morselli (2009) inançların sadece duygularla ilişkili olduğu için değil, aynı zamanda ispatlama stratejilerinin seçimi, seçilen stratejiden beklentiler ve karşılaşılan zorluklara karşı tepkiler gibi ispatlama yollarını doğrudan etkilediği için önemli olduğunu ifade etmiştir. Bell (1976) öğrencilerin çözümleri için matematiksel olarak yeterli doğrulama sağlamada güçlük yaşadıklarını ve bu güçlüklerin ispatın amacına yönelik eksikliklerinden kaynaklandığını ifade etmiştir. Yukarıdaki görüşler ispata yönelik görüşlerin ispatlama sürecinin önemli bir değişkeni olduğunu gözler önüne sermiştir. Bu nedenle, matematik öğretmeni adaylarının ispatlarda karşılaştıkları zorlukları açıklayabilmek için ispata yönelik duygu ve düşüncelerinin tespit edilmesi önemlidir. Bu çalışmanın yapılmasındaki amaç da, ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının ispat hakkındaki görüşlerinin çeşitli açılardan detaylı bir şekilde ortaya çıkarmaktır.

Yöntem

Çalışmada nitel araştırma yaklaşımı esas alınmıştır. Bu çalışmanın katılımcıları bir devlet üniversitesinin ilköğretim matematik öğretmenliği bölümünün üçüncü sınıfında öğrenim gören sekiz matematik öğretmeni adayıdır. Çalışmaya katılan öğretmen adaylarının gerçek isimlerinin yerine takma isimler kullanılmıştır. Öğretmen adaylarının takma isimleri Barış, Belma, Bilge, Buse, Adem, Ahu, Aysun ve Aziz'dir. Çalışmanın verileri birebir yapılan yarı-yapılandırılmış görüşmeler yardımıyla toplanmıştır.

Öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerini ortaya çıkarabilmek için "Matematiksel İspata Yönelik Görüşme Formu" geliştirilmiştir. MİYGF'de bulunan 10 açık uçlu soru ve detaylı bilgi elde edebilmek için hazırlanan sondalar yardımıyla öğretmen adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri birçok boyutta ortaya çıkarılmak istenmiştir. Bu boyutlar kısaca "algı", "matematikte ispat", "öğretimde ispat" ve "ikna" olarak isimlendirilebilir. Algı boyutunda öğretmen adaylarının ispata yükledikleri anlamı ve doğru yapılmış bir ispatta bulunması gereken özelliklere yönelik görüşlerini belirlemeye yönelik iki açık uçlu soru yer almıştır. Öğretmen adaylarından elde edilecek yanıtlarla, ispata yükledikleri anlamın yanında başkası tarafından yapılan ispatların doğru olup olmadığına nasıl karar verdikleri hakkında bilgi edinilmesi amaçlanmıştır. Matematikte ispat boyutunda, öğretmen adaylarının ispatların matematikteki önemi ve amacına yönelik görüşlerini ortaya çıkarabilmek için iki açık uçlu soru yer almıştır. Öğretimde ispat boyutunda, öğretmen adaylarının ispatların neden öğretildiği, kendilerine yararı olup olmadığı, başarılı oldukları ispatlar ve ispatlarda başarılı olabilmek için yapılması gerekenlere yönelik görüşlerini almak için dört açık uçlu soruya yer verilmiştir. Ayrıca, öğretmen adaylarının bu boyutta bulunan sorulara verdikleri yanıtlar ile matematiksel ispata yönelik olumsuz görüşlere sahip olup olmadıkları sınanmıştır. İkna boyutunda bulunan iki açık uçlu soru ile öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğru olup olmadığına kendilerini ve başkalarını nasıl ikna ettiklerine yönelik görüşlerinin ortaya çıkarılması amaçlanmıştır. Öğretmen adayları ile yapılan görüşmelerden elde edilen verilerin çözümlenmesinde içerik analizi kullanılmıştır.

Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yönelik Görüşleri

Araştırmanın sorularına yanıt bulabilmek için öğretmen adaylarıyla yarı yapılandırılmış görüşmeler yapılmıştır. Görüşmelerde ilk olarak öğretmen adaylarının matematiksel ispata ne anlam yüklediklerini öğrenmek amacıyla "Matematiksel ispat sizin için ne anlam ifade ediyor?" sorusu yöneltilmiştir. Alınan cevapların yedi kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Bu kategoriler hakkında bilgiler Tablo 1'de sunulmuştur.

Tablo 1. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspata Yükledikleri Anlam

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Sembolik açıklama	Ahu	*Ahu: Matematiksel ispat deyince daha çok epsilon, delta gibi matematiksel semboller ile açıklanan birşey olduğunu anlıyorum.*
Mantıklı açıklama	Adem	*Adem: Matematiksel ispat deyince işte matematikle ilgili verilerin, problemlerin akla ve mantığa uygun bir şekilde açıklanması.*
Neyin nereden geldiğini öğrenmek	Barış Belma	*Belma: Kanıt, teoremleri daha iyi anlamak ve öğrenmek amacıyla yani neyin, nereden ve nasıl geldiğini ortaya çıkarmak için yapılan birşey. Hani teoremi ezberlemek yerine ispatını öğrenerek neyin, nereden, nasıl çıktığını öğrenmek.*
Doğruluk	Aziz, Aysun	*Aziz: Birşeyin doğruluğunun gösterilmesi.*
İspatlama yöntemleri	Bilge	*Bilge: Dolaylı ispat, ispat metotları geliyor aklıma.*
Tekrarlamak	Bilge	*Bilge: Daha önceden ispatlanmış birşeyi bize öğretilen şekliyle, matematiksel kurallara uygun bir şekilde yapılmış akla uygun bir şekilde gösterilmesi.*
Açığa çıkarmak	Buse	*Buse: Herhangi bir matematiksel konu üzerinde birşeyin açığa çıkarılması yani herkes tarafından kabul edilmesi gibi birşey.*

Tablo 1 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Adem, Barış, Belma) ispata sembolik açıklama, mantıklı açıklama ve neyin nereden geldiğini öğrenme anlamlarını yükledikleri tespit edilmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının yarısının ispatın açıklama fonksiyonunu göz önünde bulundurduğu söylenebilir. Ahu, bu öğretmen adaylarından biraz farklı olarak, ispata sembolik açıklama anlamını yüklemiştir. Aziz ve Aysun matematiksel ispatın bir şeyin doğruluğunun gösterilmesi olduğunu belirtmişlerdir. Sadece Buse, ispat denince aklına birşeyin açığa çıkarılmasının geldiğini belirtmiştir. Bilge ise ispat deyince aklına ilk gelen şeyin ispatlama metotları olduğunu, daha sonra da matematikçilerin daha önceden yaptıkları şeylerin tekrar gösterilmesi olduğunu ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarından ispata ne anlam yükledikleri hakkında görüşleri alındıktan sonra, matematiksel ispatın amacına yönelik görüşleri alınmıştır. Görüşlerin altı kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 2'de bu kategoriler ve bu kategorilerin oluşmasını sağlayan örnek ifadelere yer verilmiştir.

Tablo 2. Öğretmen Adaylarının İspatın Amacına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Bir ifadenin doğruluğunun gösterilmesi	Ahu Bilge Aysun Aziz	*Ahu: Matematiksel ispatın amacı, matematiksel ifade gerçek mi değil mi onu ifade etmektir.* *Aziz: Hocam işte bir yol bulunur, bu yolun geçerliğini doğrular.*
Keşfetmek	Ahu Buse	*Buse: İspatta amaç başka kuralları, formülleri kullanıp bilinen şeyleri kullanarak bilinmeyeni bulmak, keşfetmektir.*
Şüpheyi ortadan kaldırmak	Adem	*Adem: Benim düşüncem, örneğin bir özellik verildiği zaman ispatlanmazsa şüphe oluyor. Yani doğru mu, bütün durumlar için geçerli mi diye. İspat olduğu zaman daha güven duyuyorsunuz. İspat olduğu zaman o şüpheyi ortadan kaldırıyor.*
Neyin nereden geldiğini bilmek	Barış	*Barış: İspatla birlikte neyin nereden geldiği bilinir.*
Konuları daha iyi kavratmak	Belma	*Belma: Aslında ispat matematikçilerin hani, teorem, aslında ispatlardan yola çıkarak teoremlerin bulunduğuna inanıyorum ben. Matematikçilerin uğraştığı daha sonra öğrencilerin konuları daha iyi kavraması için verilmesi gerek diye düşünüyorum.*

Tablo 2 incelendiğinde, öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Bilge, Aysun, Aziz) ispatın amacının doğrulama yapmak olduğunu belirttikleri görülmüştür. Bu öğrenciler ispatın matematiksel bir ifadenin ya da bulunan bir matematiksel yöntemin geçerli olup olmadığını kontrol ettiğini belirtmişlerdir. Ahu ve Buse ispatın amacının keşfetmek olduğunu ifade etmişlerdir. Onlara göre ispatın amacı bilinenlerden hareket edilerek bilinmeyen yeni şeyler bulmaktır. Adem ise ispata sosyal açıdan bakarak matematiksel ispatların amacının bir ifade üzerindeki şüpheyi ortadan kaldırmak olduğunu belirtmiştir. Adem ortaya atılan bir özellik ya da kuralın doğruluğu hakkındaki şüphelerin ispat sayesinde ortadan kalktığını ve herkesin böylelikle o özelliğe ikna olabileceğini belirtmiştir. Barış, ispatın amacının birşeyin nereden ve nasıl geldiğini belirtmek olduğunu ifade etmiştir. Belma ise ispatların matematikçilerin bir uğraşı olduğunu ifade ederek öğrencilere konuları daha iyi kavratmak gibi bir amacının olduğunu belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının ispatın amacına yönelik görüşleri alındıktan sonra ispatın önemi hakkında görüş bildirmeleri istenmiştir. Görüşmelerde bütün öğretmen adayları ispatın matematikte önemli bir yere sahip olduğunu belirtmişlerdir. Bunun üzerine öğretmen adaylarının matematiksel ispatların neden önemli olduğuna yönelik görüşleri alınmıştır. Görüşlerin altı kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 3'te bu kategoriler ve kategorilerin oluşmasını sağlayan örnek ifadeler sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretmen Adaylarının İspatın Neden Önemli Olduğuna Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Şüpheyi ortadan kaldırır	Ahu Adem Aysun Bilge	*Ahu: Önemi şöyle: ispatın öneminden bahsediyorsak onun olmadığını düşünmemiz lazım. İspat olmasaydı, o zaman ortalık çok karışırdı gibime geliyor. Yani şimdi bilim adamları bir teorem ortaya attı diyelim. Onun aksini de savunabilen olur. Şimdi bunların hangisinin doğru olduğuna nasıl karar vereceğiz? Onları ispatlamaları lazım ki hangi bilginin doğru olduğuna karar verelim.*
Kavramsal bilgiyi kuvvetlendirir	Aysun Barış Belma	*Aysun: Önemlidir, çünkü matematik somut değil soyut. Eğer biz bunu kafamızda oturtamazsak inanamayız. O yüzden matematiksel ispat önemlidir. Çünkü kavramları kavrayabilmemiz için böyle şeyler gereklidir.*
Zor işleri kolaylaştırır	Aziz	*Aziz: Dediğim gibi zor işleri daha da kolaylaştırma için önemlidir.*
Bilgilerin kalıcılığını sağlar	Barış	*Barış: İspat yapma, öğrencilerin kavramsal bilgilerini daha da kuvvetlendirir. Unutmaz. Ezberlese bile onun nereden geldiğini de bilse o zaman uzun yıllar boyunca unutmaz. Kısa sürede unutmaz, ispat onun için önemlidir yani.*
Bilginin devamlılığını sağlar	Buse	*Buse: İspatlar matematikte önemlidir. Çünkü herhangi birşeyi ispatlayamazsak bundan sonra gelecek konuları da bulamayız. Mesela, geometride olsun, analizde olsun ondan sonra gelecek konuyu da açığa çıkaramayız. O yüzden bir şeyleri ispatlayalım ki önü açılsın.*
Neyin nereden geldiğini açıklar	Bilge	*Bilge: Matematikte önemlidir. Matematiksel ispat olmasaydı yaptığımız soyut işlemlerde neyin nereden geldiğini ya da doğru mu bilemezdik. Matematik soyut bir bilim. Doğru mu, yanlış mı olduğunu bize akla uygun bir şekilde öğrettiği, uygulattığı ve buldurduğu için gereklidir.*

Tablo 3 incelendiğinde, öğretmen adaylarının yarısının (Ahu, Aysun, Adem, Bilge) matematiksel ispatların, matematiksel ifadelerin doğruluğu üzerindeki şüpheyi ortadan kaldırdığı için önemli olduğunu düşündükleri görülmüştür. Öğretmen adaylarından üçü (Aysun, Barış, Belma) ispatların kavramsal bilgiyi kuvvetlendirdiğini, konuların daha iyi anlaşıldığını ifade ederek ispatların bu yüzden önemli olduğunu belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarından Aziz, ispatın zor işleri kolaylaştırdığı için önemli olduğunu belirtmiştir. Aziz'in zor işleri kolaylaştırmaktan kastı görüşmede daha önce ifade ettiği, ispatlar sayesinde elde edilen teoremlerin, problemlerin ya da işlemlerin çözümünü kolaylaştırdığı şeklindeki görüşüdür. Barış ispatların, bilgilerin kalıcılığını sağladığı için önemli olduğunu belirtmiştir. Buse ise ispatlar sayesinde elde edilen bilgilerin yeni bilgilere ulaşmaya kapı araladığını belirtmiştir. İspatın bu sayede bilginin devamlılığını sağladığını ifade etmiştir. Bilge de matematiksel ispatlar sayesinde yapılan işlemlerin nereden geldiğinin açıklanmasından dolayı ispatların önemli olduğunu belirtmiştir.

Öğretmen adaylarının ispatın önemine yönelik görüşlerinin alınmasının ardından matematiksel ispatın onlara neden öğretildiğine yönelik görüşleri alınmıştır. Görüşlerin dokuz kategoride toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 4'te söz konusu kategoriler hakkında bilgiler verilmiştir.

Tablo 4. Öğretmen Adaylarının İspatların Neden Öğretildiğine Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Akademik kariyer yapacaklar için	Aziz Barış Belma Buse	*Aziz: İleride matematik öğretmeni olacağız ama daha da bilgili olmak için öğretiliyor. Sadece öğretmen değil mesela yüksek lisans yapacak öğrenciler var. Onlara yönelik de eğitim verilmesi gerekiyor.*
Kuralların nereden geldiğini bilmek için	Ahu Bilge Aysun Buse	*Buse: Neden öğretiliyor bize? Biz matematik öğretmeni olacağız inşallah. Bir matematikçi olarak da bizim bunları bilmemiz gerekiyor. İspatları bilmemiz gerekiyor. Hani, bir lise öğrencisi de formülleri bilebilir ama bizim bunların nereden geldiğini bilmemiz gerekir. Yani bunun eğitimini almamız gerekir, o yüzden.*
Daha bilgili olmak için	Adem Aysun Aziz	*Adem: İspatları bilmemiz gerekiyor, alanda daha iyi olabilmemiz için.*
Farklı bakış açısı geliştirmek için	Adem Barış	*Barış: Tabi ki matematiksel ispatlar öğretilmelidir. Çünkü öğrendiğimiz zaman sorulara bakış açımız gelişiyor. Farklı açılardan bakmak her zaman iyidir.*
Bilgilerin kalıcılığını sağlamak için	Aysun Barış	*Aysun: İspatlar öğretilmelidir çünkü birşeyin ispatının nasıl olduğunu bilmezsek, o bizde yüzeysel olarak kalır. Ama birşeyin nereden geldiğini bilirsek daha kalıcı öğrenme sağlanır.*
Meraklı öğrencilere yanıt verebilmek için	Ahu	*Ahu: Hocam, bazen çok meraklı öğrenciler olabiliyor. Yani özel eğitim derslerinde de olabilir, ispat sadece analiz ve cebir anlaşılmamalı. Meraklı öğrenciler oluyor onlara yanıt vermemizde yardımcı olur. Bir de insan anladığı şeyi anlatırken daha rahat oluyor. Daha kolay anlatıyor. Mesela sen birşeyin nereden geldiğini bilirsen, çocuğa onu ifade etmesen bile sen nereden geldiğini bildiğin için karşı tarafa daha kolay geçirebilirsin.*
Başkalarını ikna etmek için	Adem	*Adem: Konulara daha hâkim oluruz o zaman. Mesela bir soru sorulduğunda onu çok soru çözerek cevaplayabiliriz ama ispatını bildiğimiz zaman karşıdakini daha iyi ikna edebilirsiniz.*
Matematiksel düşünmeyi geliştirmek için	Adem	*Adem: Öğretilmelidir yani ufkumuz açılır, daha iyi düşünürüz, düşünce şeklimiz değişir. Bir konu hakkında daha fazla, daha farklı yönlerden bakabiliriz.*
Ezberlenmesi için	Belma	*Belma: Şuan ezberleyelim geçelim diye bir mantığı yok. Çünkü biz ilköğretim matematik öğretmeni olacağız. Bu ispatların bizim için yani yüksek lisans falan düşünmeyenler için bir yararı yok. O yüzden biz dersten geçmek için ezberleyip geçiyoruz.*

Tablo 4 incelendiğinde öğretmen adayları çoğunlukla (Belma hariç) ispatların akademik kariyer yapacak öğrenciler için ya da matematiksel kuralların nereden geldiğinin bilinmesi için lisans seviyesindeki derslerde öğretildiğini ifade etmişlerdir. Üç öğretmen adayı (Adem, Aysun, Aziz) matematik alanında daha fazla bilgiye sahip olup uzman olmak için matematiksel ispatların öğretildiğini vurgulamışlardır. Adem ve Barış matematiksel ispatların öğretilmesinin amacının matematiğe yönelik farklı bakış açısı geliştirmek olduğunu belirtmişlerdir. İki öğrenci de (Aysun, Barış) matematiksel ispatlar sayesinde bilgilerin daha kalıcı olmasından dolayı matematiksel ispatların öğretiminin yapıldığını ifade etmişlerdir. Birer öğrenci de meraklı öğrencilere yanıt verebilmek için (Ahu), başkalarını ikna edebilmek için (Adem) ve matematiksel düşünmeyi geliştirdiği için (Adem) ispat öğretiminin yapıldığını belirtmiştir. Belma ise ispat öğretimine olumsuz bakarak ispatların sadece ezberlenmesi için öğretildiğini ifade etmiştir.

Öğretmen adaylarının ispat öğretimine yönelik görüşlerinin alınmasının ardından şimdiye kadar öğrendikleri ispatların matematiksel anlamda kendilerine yarar sağlayıp sağlamadığı hakkında görüşleri alınmıştır. Öğrencilerin görüşlerinin 10 kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 5'te bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 5. Öğretmen Adaylarının Matematiksel İspatların Kendilerine Matematiksel Anlamda Yarar Sağlayıp Sağlamadığına Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Düşünme kapasitemiz gelişti	Ahu Aziz Aysun Adem	*Aysun: Düşünme zekâm gelişti, daha ayrıntılı düşünebiliyorum. Mesela bakıyoruz bu buradan geldiği için, şu şuradan geldiği için önceki işlediğimiz şeylere dayanarak bazı şeyleri ispat ediyoruz. Bunları düşünerek ispat yapabildiğimi gördüm.*
Yararı yok	Barış Belma Buse	*Belma: Her şey yararlı oldu diyemem ama bazı ispatlar yararlı oldu. İleride öğretmenlik hayatımda pek yararı olacağını düşünmediğim için. Belki olacaktır ama ben bunu henüz kavrayamamışımdır. Kendi adıma matematiksel anlamda fayda görmüyorum. Önemli olduğunu düşünüyorum ama benim için değil.*
Matematiğe bakış açımız değişti	Adem Aziz	*Adem: Ufkum açıldı, daha iyi düşünebiliyorum. Bu, ders çalışırken oluyor. İspatlarda bu yönden de düşünülebiliyormuş. Mesela sizin bilmediğiniz bir formül verildiği zaman bu nereden geldi diye sorabilirsiniz yani.*
Soru çözümüne yardımcı oluyor	Bilge Aziz	*Bilge: Gerçek hayatta yararlı olmuyor tabi ki. Matematiksel anlamda her yerde kullanıyoruz ama. Bir yöntem öğrenip, her alandaki sorulara uygulayabiliyoruz. Yararlı olduğunu düşünüyorum.*
Kalıcı bilgi sağladı	Adem	*Adem: Bilginin kalıcı olmasını sağladı. İyi anlıyoruz yani sıkılmıyoruz ispatlarda.*
İlişkilendirme becerimiz arttı		*Adem: İlişkilendirmeyi de sağlıyor. Mesela iki konu hakkında ayrıntılı bir şekilde ilişkilendirmeyi de sağlıyor. Misal, türev ile ilgili bir ispatta limit de kullanılıyor. İspatını yaptığınız zaman limit hakkındaki bilgilerinizi de hatırlıyorsunuz.*
Derslerdeki başarı arttı		*Adem: Konular daha iyi anlaşılıyor o şekilde. Soruları rahat cevaplayabiliyoruz. Derslerdeki başarı oranımız artıyor.*
Kavramların iyi bilinmesi gerektiği öğrenildi	Aysun	*Aysun: Mesela soyut cebirde çok fazla teorem görüp ispatladık. Onların çok yararı oldu. Nasıl yapıldığını öğrendim. Verilen teoremi ispatlamak için teoremdeki kavramların iyi bilinmesi gerektiğini öğrendim. Çünkü genelde ispatları tanımlardan yola çıkarak yapıyoruz.*
Matematiği sevdirdi	Aziz	*Aziz: Matematiğe bakış açısı değişiyor insanın. Soru çözme yeteneği de gelişiyor. Başka hocam, matematiği sevdiriyor ispat. Ben çok seviyorum yani. Akılda tutması zor ama hoşuma gidiyor. Farklı açılardan bakmayı öğretiyor. İşlem kabiliyetini geliştiriyor. Düşünmeyi, matematiksel düşünmeyi, soyut düşünmeyi geliştiriyor.*
İşlem kabiliyetini geliştirdi		

Tablo 5'e göre, öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Adem, Aysun, Aziz) matematiksel ispatlar sayesinde matematiksel düşüncelerinin geliştiğini ifade etmişlerdir. Buna karşın Barış, Belma ve Buse matematiksel ispatların kendilerine matematiksel anlamda bir katkısı olmadığını söylemişlerdir. Buna göre, bu öğretmen adaylarının matematiksel ispata karşı olumsuz görüşlere sahip oldukları söylenebilir. İki öğretmen adayı matematiksel ispatlar sayesinde matematiğe olan bakış açılarının değiştiğini belirtmiştir (Adem, Aziz). Bilge ve Aziz öğrendikleri matematiksel ispatların soru çözümlerinde yardımcı olduğunu ifade etmişlerdir. Adem matematiksel ispatlar sayesinde bilgilerinin daha kalıcı olduğunu, matematiksel kavramlar arasında ilişkilendirme becerisinin ve diğer derslerdeki başarısının arttığını vurgulamıştır. Aysun matematiksel ispatlarla birlikte matematikteki konuların daha iyi öğrenilmesi gerektiğini öğrendiğini ifade etmiştir. Aziz de matematiksel ispatlar sayesinde matematiği sevdiğini ve işlem kabiliyetinin geliştiğini dile getirmiştir.

Öğretmen adaylarının hangi tür ispatlarda başarılı olduğunu ortaya çıkarmak amacıyla konuyla ilgili görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının başarılı oldukları ispatlara yönelik görüşlerinin beş kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Söz konusu kategorilere yönelik bilgiler Tablo 6'da sunulmuştur.

Tablo 6. Öğretmen Adaylarının Başarılı Oldukları İspatlara Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Sayısal ispatlar	Ahu Aziz Belma	*Ahu: Sayısal olanlar, iki üç düşünceyi birleştirince hemen çıkanlar. Yani çok fazla tümdengelim kullanmadan olanlarda başarılı oluyorum.*
Tümevarım yöntemli ispatlar	Bilge Buse	*Bilge: Tümevarım ispat metoduyla yapılan ispatlar diyeceğim şimdi. Çünkü tümevarımı belli başlı yerlerde kullanıyoruz. Yani sayıların düzgün bir şekilde sıralandığı durumlarda kullanıyoruz.*
Olmayana ergi yöntemli ispatlar	Barış Buse	*Barış: Olmayana ergi metoduyla yapılan ispatlar. Çünkü o biraz daha mantıklı geliyor. Mesela tek bir çözümü vardır diyor. Ben iki çözümün olduğunu kabul ediyorum ve bunu çürütüyorum diğer aşamalarda. Biraz daha akla uygun.*
Çözüm yöntemi açık olanlar	Ahu Aysun	*Aysun: Hocam başarılı olduğum ispatların genelinde bariz belli oluyor. Şu şuradan diye. Yine Soyut cebirden örnek vereceğim. Mesela, şu şunun alt uzayı olduğunu gösterin dediğinde bunu kullanırsam buradan çıkar diyorum. Bu şekilde geliyor ama bazılarında hiçbir şekilde mantık yürütemiyorum.*
Kısa ispatlar	Adem	*Adem: Kısa ispatlarda. Yani, yine türevden örnek vereceğim. Bir noktada türevinin olabilmesi için sürekli olması lazım. O kısa ispat yani onu yapabilirim. Türevli olması için sürekli olması gerekiyor ama sürekli olması türevli olmasını gerektirmiyor. Kısa bir ispat yani onlarda daha kalıcı oluyor.*

Tablo 6'ya göre öğretmen adaylarının üçü (Ahu, Aziz, Belma) sayısal ispatlarda başarılı olduklarını ifade etmişlerdir. Sayısal ispat ile öğretmen adayları, çok fazla sözel ifadeler içermeyen, ispat içerisindeki argümanlarda işlemsel gerekçelerin yoğunlukta olduğu, genellikle formüllerin ispatlanması şeklindeki ispatları kastettiklerini ifade etmişlerdir. Yine öğretmen adaylarından üçü (Bilge, Buse, Barış) başarılı oldukları ispatları, ispatlama yöntemi açısından değerlendirmişlerdir. İki öğretmen adayı (Bilge, Buse) tümevarım ispatlama yöntemi ile yapılmış ispatlarda daha başarılı olduklarını belirtirken, iki öğretmen adayı (Buse, Barış) da olmayana ergi yönetimi ile yapılan ispatlarda daha başarılı olduklarını vurgulamışlardır. Ahu ve Aysun çözümü açık olan ispatlarda daha başarılı olduklarını ifade etmişlerdir. Adem ise kısa ispatları yaparken daha başarılı olduğunu belirtmiştir.

Başarılı oldukları ispatları ispatlama yöntemleri açısından değerlendiren öğretmen adaylarının ispatlama yöntemleri hakkındaki bilgilerini ortaya çıkarmak amacıyla bilgileri sorgulanmıştır. Öğrencilerin konu ile ilgili ifadelerinden ispatlama yöntemleri ile ilgili yeterli bilgiye sahip olmadıkları tespit edilmiştir. Özellikle bu öğretmen adaylarının çelişki bulma ve olmayana ergi yöntemini açıklayamadıkları, çelişki bulma yöntemi ile olmayana ergi yöntemi arasındaki farkı belirtemedikleri ve birbiri yerine kullandıkları belirlenmiştir. Aşağıda bu öğretmen adaylarından Barış'ın olmayana ergi yöntemi ile çelişki bulma yöntemi arasındaki farka yönelik ifadeleri sunulmuştur.

Barış: Olmayana ergide ilk başta kabul ediyoruz birşeyi. Mesela, bunun tek bir çözümü var diyor. Ben iki çözümü olduğunu kabul ediyorum, daha sonra işlemleri yaptığım zaman bir tane çıkıyor. Bu da kabulümle çeliştiği için olmayana ergi öyle. Çelişki bulma şöyle olur; diyelim ki x eşittir bir denklem var. Mesela, denklemin çözümüne 3 diyor. Ben denklemi çözdüm, x=2 ve x=-2 buldum. O zaman denklemin çözümü olmuyor. x hem 2'ye hem de -2'ye eşit, bu bir çelişkidir.

Öğretmen adaylarının başarılı oldukları ispatlara ilişkin görüşlerinin alınmasından sonra onlara ispatlarda başarılı olmak için ne yapılması gerektiği sorulmuştur. Alınan yanıtların yedi kategori altında toplandığı belirlenmiştir. Tablo 7'de bu kategoriler hakkında bilgiler sunulmuştur.

Tablo 7. Öğretmen Adaylarına Göre İspatlarda Başarılı Olabilmek İçin Yapılması Gerekenler

Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Konuyu iyi bilme	Adem Aziz Barış Bilge Buse	*Aziz: Bir kere tanımları kavramsal boyutta bilmesi lazım. Mesela limit deyince, limiti tam olarak anlayabilmesi lazım. Yani limitin ne olduğunu anlaması lazım. Yani bu şekilde kavramsal olarak bilmesi lazım.*
Ezber yapmama	Ahu Adem Aysun Barış	*Aysun: Ezber yapanlar başarılı olamıyor. Çünkü neyin nereden geldiğini bilmesi lazım. Hocam mesela arada olma teoremi sınavda sorulmuştu. Millet direk ezberlediği için başarılı olamadı ama kendi mantığı ile ispat oluşturulduğunda başarılı olunuyor yani.*
İspatların üzerinde yoğunlaşma	Ahu Buse	*Ahu: Aslında herkes yapabilir. Çok zor birşey değil. Uğraşması lazım biraz. Üzerinde düşünmesi lazım, uğraşması lazım.*
İyi ezberleme	Belma Bilge	*Belma: Şuan ezberleyip başarılı oluyoruz. İyi ezberlemeli.*
Gerekçeleri anlama	Adem	*Adem: Öncelikle konuyu iyi bilmesi lazım. Ondan sonra günlük ders çalışması lazım. İspatlarda derste iyi anlayacak daha sonra not alması lazım. İspatın adımlarındaki geçişleri iyi anlaması lazım. Ezberlemesi değil ama neyin nereden geldiğini bilmesi lazım*
İspatlama yöntemlerini ayırt etme	Bilge	*Bilge: Öncelikle ispatlama yöntemlerinin anlamını, olmayana ergi ile çelişki bulma arasındaki farkı, karıştırılabilecek şeyleri iyi bilmesi gerekiyor. Sonra o konu hakkındaki donanımının ve eski bilgilerinin yeterli olması gerekiyor. Yani biz öğrenciyiz, ne kadar baksak da zorlanırız ispatlarda. Şimdiye kadar gördüğümüz, defterlerdeki ispatları tekrar ispatlamaktı. Bizim karşımıza zaten kendimizin ispatlayabileceği bir tarzda bir ispat sorulmadı.*
Öğrencilere fırsat verme	Bilge	*Bilge: İşlediğimiz eğitim derslerinde buluş yolu ile öğretimin daha iyi olacağını öğrenmiştik. O yüzden buluş yolu ile öğrenciye buldurarak yani ipucu vererek ispatın öğrenciye tamamlatılmasını bizim için öğretici bulurum. Direk hoca kendisi yapınca biz hemen tahtadan defterimize geçiriyoruz. Pek yararı olmuyor, ezberci oluyor.*

Öğretmen adaylarının çoğunluğu ispatlarda başarılı olabilmek için ispatın yapıldığı konuyu iyi bilmenin gerekli olduğunu vurgulamışlardır. Bu kategorideki öğretmen adayları özellikle tanımların kavramsal boyutta bilinmesinin gerekliliği üzerinde durmuşlardır. Öğretmen adaylarının yarısı da ispatların kesinlikle ezberlenmemesi gerektiğini, ezberlemek yerine ispatın mantığının anlaşılmaya çalışılmasını önermişlerdir. Ahu ve Buse ispatların üzerinde ciddi bir şekilde yoğunlaşmanın gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Belma ve Bilge ise ispatlarda başarılı olmanın yolunun ispatları iyi ezberlemekten geçtiğini ifade etmişlerdir. Adem ispatlarda başarılı olabilmek için ispatların içerisindeki argümanları anlamanın önemli olduğunu vurgulamıştır. Bilge ispatlama yöntemleri hakkında yeterli bilgiye sahip olmanın ispatlarda başarının sağlanabilmesi için gerekli olduğunu belirtmiştir. Ayrıca Bilge, ispatların öğretimine yönelik bir eleştiride bulunmuştur. İspatların öğretimi sırasında öğrencilerin pasif olduklarını belirterek öğrencilere ispat yapmaları için fırsat verilmesinin, ispatların daha iyi öğrenilmesi adına yararlı olacağını ifade etmiştir.

Öğrencilerin doğru ispat anlayışlarını ve kriterlerini ortaya çıkarmak amacıyla öğretmen adaylarının doğru yapılmış bir ispatta bulunması gereken özelliklere yönelik görüşleri alınmıştır. Görüşlerin dört kategori ve 12 alt kategori altında toplandığı tespit edilmiştir.

Tablo 8. Öğretmen Adaylarına Göre Doğru Yapılmış Bir İspatta Bulunması Gereken Özellikler

Kategoriler	Alt Kategoriler	Öğretmen adayları	*Örnek ifadeler*
Argüman incelemesi	Argümanlarda bilinen gerçekler kullanılmalı	Ahu Belma Bilge Buse	*Ahu: Bir kere neye dayandırmış? Bilinen bir kavram mı? Gerekçesi ne, yani bildiğimiz bir teorem mi? Kabul edilmiş bir şey mi? Bir kere ona bakarım. Yaptığı işlemlere bakarım. İşlemsel bir hata var mı?*
	Matematiksel kurallara uygun olmalı, İfadelerde çelişki olmamalı	Ahu Adem Barış	*Barış: İspatın nasıl yapıldığına baktığımız zaman öncelikle kullanılan verilerin birbiri ile çelişmemesi lazım. Ondan sonra önceki bildiğim bilgilerle tezat bir şey oluşturmaması lazım. Yani doğru bildiğim ifadeler çelişmeyecek.*
	İşlemsel hata olmamalı	Ahu Aziz	*Aziz: Doğru yapılmış bir ispatta işlemsel bir hata olmayacak*
	Kilit ifadelerde hata yapılmamalı	Aziz	*Aziz: Çok uç noktalar olur ispatta. Mesela deltayı limitte minimum alması gerekiyordu. Onu almalı, o çok önemli bir nokta. Eğer orayı almamışsa yanlış olur ispat. Çünkü ispatta oraya kadar gelmiş ama orada bir şart var. Eğer o şart sağlanmazsa ispat olmaz zaten. Çünkü sağlanmayan bir durum ortaya çıkar. Aksine bir örnek bulunabilir.*
Yapısal inceleme	Teoremin hipotezleri kullanılmalı	Aysun Belma	*Belma: Teoremde verilen verilerin dışında bir şey kullandıysa bu ispat geçersizdir. Öncelikle ona dikkat ederim. Başka, ispat tam olduysa sonucuna ulaşmışsa. Başka bakacağım şeyler de vardır da, şuan aklıma gelmiyor.*
	Teoremin hükmü bulunmalı	Aysun Belma	*Aysun: Verilenleri kullanmış mı ve hükmü yerine getirmiş mi diye bakarım. İspatta hüküm önemlidir. Çünkü hükmünü ispatlamaya çalışıyoruz.*
	Teoremin hükmü kullanılmamalı	Buse	*Buse: En son istenen şey bizim neyi ispatlayacak olduğumuzdur. En son bunlara dayanarak varacak olduğumuz şeydir. Eğer sonuç kısmını ispatta kullandı ise bu yanlıştır. Kesinlikle sonuç kısmı ispatta kullanılmamalıdır. Bunu yaptıysa yanlış.*
	İspatlama yöntemi uygun olmalı	Ahu Aysun Buse	*Buse: Bir de hangi ispatlama yöntemini kullandı? Bu kullandığı ispatlama yöntemini ispatında barındırıyor mu? Mesela olmayana ergi ile çelişki bulmayı kullandı. Bunları kullandığı zaman gerçekten en sonuna vardığında kabul ettiği ile zıtlık oluşturuyor mu? Bunları yapması gerekir diye düşünüyorum.*
Dilsel-Mantıksal inceleme	Açık, anlaşılır olmalı	Aysun Bilge	*Bilge: Akla yatkın olmalı en başta. Ben o ispatı okuyunca evet bunu buradan yapmış doğru kullanmış diyebilmeliyim. Yani, ben de o işlemi düşündüğümde oradakiyle aynı sonuca, aynı düşünceye varabilmeliyim. Herkes tarafından objektif olması diyebilirim.*
	İkna edici olmalı	Aysun Bilge	*Aysun: Herkesi ikna edici bir şekilde olmasın lazım. Kolay olması lazım, kolay olmalı derken benim de aklıma yatacak yani. Herkesin anlayabileceği şekilde olacak.*
	Yapacağı işlemlere zemin hazırlamalı	Aziz	*Aziz: Baş kısmına bakarım hocam. Yapacağı işlemlere zemin hazırlamış mı? Onları ifade etmiş mi? Yani ondan sonra söylediklerini matematiksel olarak yapabilmiş mi?*
Otoriter inceleme	Kitaptaki gibi olmalı	Aysun	*Aysun: Doğru bir ispatta neler olmalı derken kitaptaki gibi olmalı geliyor aklıma.*

Tablo 8 incelendiğinde, öğretmen adaylarının doğru bir ispatta bulunması gereken özelliklere yönelik görüşlerini belirtirken ispatların doğruluğunu dört ana başlık altında inceledikleri belirlenmiştir. Öğretmen adaylarının tamamına yakını (Aysun hariç) ispatların doğruluğunu incelerken argüman incelemesi yapmıştır. Yani öğretmen adayları ispatlarda bulunan argümanları kullanılan gerekçe, işlemsel doğruluk, matematiksel kurallara uygunluk ve ispattaki kilit düşüncelerde hata yapılmaması noktalarında incelemişlerdir. Dört öğretmen adayı, ispatlarda kullanılan gerekçelerin herkes tarafından bilinen gerçekler olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarından üç tanesi de ispatın matematiksel kurallara uygun olması gerektiğini ve ifadelerin birbiri ile çelişmemesi gerektiğini ifade etmişlerdir. İki öğretmen adayı da ispatlarda işlemsel bir hatanın olmaması gerektiğini belirtmişlerdir. Aziz ise ispatlarda önemli kilit noktalar olduğunu belirterek bu noktaların kesinlikle ispatta yer alması gerektiğini vurgulamıştır. Aziz düşüncesini desteklemek için fonksiyonların limiti ile ilgili yapılan ispatlarda delta sayısının minimum seçilmesi gerektiğini, aksi halde ispatın doğruluğunun tehlikeye düşeceğini belirtmiştir. Öğretmen adaylarının yarısı ispatları yapısal olarak incelemişlerdir. Yani ispatların içerisinde mevcut olan argümanların doğruluğunu ya da ispatta bulunan mantıksal boşlukları incelemek yerine ispatlarda kullanılan ispatlama yöntemine, teoremin hipotezine ve hükmüne dikkat ederek inceleme yaptıklarını ifade etmişlerdir. Aysun ve Belma doğru yapılmış bir ispatta teoremin hipotezinin kullanılması gerektiğini ve sonuç olarak teoremin hükmüne ulaşılmasının öneminden bahsetmişlerdir. Buse ise teoremin hükmünün ispatta kullanılmaması gerektiğini belirtmiştir. Ahu, Aysun ve Buse ispatta kullanılan ispatlama yönteminin uygunluğuna dikkat ettiklerini ifade etmişlerdir. Üç öğretmen adayı da ispatların doğruluğuna dilsel ve mantıksal açıdan yaklaşmışlardır. Bu öğretmen adayları doğru bir ispattaki matematiksel dilin açık, anlaşılır olması gerektiğini ifade etmişlerdir. Ayrıca doğru yapılmış bir ispatın akla ve mantığa uygun olarak ikna edici olması gerektiğini belirtmişlerdir (Aysun, Bilge). Aziz ise doğru yapılmış bir ispatta yapılması planlanan işlemlere zemin hazırlayan ifadelerin yer alması gerektiğini vurgulamıştır. Son olarak Aysun, doğru yapılmış bir ispatta bulunması gereken özellikleri ifade ederken otoriter bir görüş belirtmiştir. Aysun, doğru yapılmış bir ispatın kitaptaki gibi olması gerektiğini savunmuştur.

Öğretmen adaylarına matematiksel bir önermenin doğruluğu hakkında şüpheye düştüklerinde kendilerini nasıl ikna ettikleri sorulmuştur. Alınan cevapların yedi kategori altında toplandığı tespit edilmiştir. Tablo 9'da bu kategoriler ve öğretmen adaylarının örnek ifadelerinden bölümlere yer verilmiştir.

Tablo 9. Öğretmen Adaylarının Matematiksel Bir Önermenin Doğruluğu Hakkında Şüpheye Düştüklerinde Kendilerini Nasıl İkna Ettiklerine Yönelik Görüşleri

Kategoriler	**Öğretmen adayları**	***Örnek ifadeler***
Tanımlar üzerinden muhakeme	Ahu Aysun Belma Bilge	*Ahu: Tanım ve teoremleri dayanak olarak kullanıyorum. Benim kendimi ikna etmem zordur. O konuda bilgili olursam zaten bilgimden yola çıkarak yapabilirim. Bilgiliysem onu dayandırmam lazım. Mesela dedim ki doğru veya yanlış, burada teoremi daha çok kullanıyoruz. Teorem, formül, kural olabilir.*
Teoremler üzerinden muhakeme	Ahu Aysun Bilge	*Aysun: Daha önceki teoremlerden bu böyledir derim ya da tanımları gerekçe olarak kullanırım*
İspat yapma	Adem Aysun Aziz	*Aziz: İspatlamaya çalışırım. Denilen ifade doğrultusunda bir ispat yapabilirsem zaten doğruluğuna ikna olurum.*
Örneklerle deneme	Barış Belma Bilge Buse	*Bilge: Ben direkt örnekleri düşünürüm. O matematiksel ifadeye yakın benzer bir örnekle denerim*
Şekil çizme	Barış Belma Buse	*Barış: Bu ifadeler soyut ifadeler olduğu için genelde tanımlardan pek anlaşılmaz. Tanımlar pek cazip değil. Şekil ve örnek üzerinden daha çok.*
Yanlışlık için ters örnek arama	Buse dışındaki öğretmen adayları	*Adem: Bu ifade üzerinde yanlış örnek bulmaya çalışırım. Çünkü doğru örnek olduğu zaman her zaman doğru olacak diye bir şey yok.*
Yanlışlık için açıklama yapma	Buse	*Buse: Bir ifadenin yanlış olduğunu göstermek için ya denerim ya da şekil çizerek anlatmaya çalışırım.*

Tablo 9'daki verilere göre, öğretmen adaylarının yarısı (Ahu, Aysun, Belma, Bilge) matematiksel bir önermenin doğruluğu hakkında şüpheye düştüğünde tanımlar üzerinden muhakeme ederek karar verdiklerini ifade etmişlerdir. Bu öğretmen adayları matematiksel kavramlar üzerine düşünerek söz konusu şüpheden kurtulduklarını belirtmişlerdir. Öğretmen adaylarından dördü (Barış, Belma, Bilge, Buse) matematiksel bir önermenin doğruluğuna birkaç örnekle deneme yaparak ikna olduklarını dile getirmişlerdir. Üç öğretmen adayı (Ahu, Aysun, Bilge) matematiksel önermenin bildikleri teoremler ile uyumlu olması durumunda doğruluğu hakkında şüphelerinin ortadan kalktığını ifade etmişlerdir. Adem, Aysun ve Aziz ise matematiksel bir ifadeye doğru diyebilmeleri için o önermeyi ispat etmeleri gerektiğini vurgulamışlardır. İfadeyi ispatlayabilirlerse doğru olduğuna ikna olacaklarını, aksi durumda ise önermenin doğruluğu hakkında bir karar veremeyeceklerini ifade etmişlerdir. Barış, Belma ve Buse bir matematiksel önermenin doğru olduğuna şekil çizerek karar verebileceklerini belirtmişlerdir.

Buse dışındaki tüm öğretmen adayları matematiksel önermenin yanlış olduğuna bir ters örnek bulmaları durumunda karar vereceklerini belirtmişlerdir. Buse ise bir matematiksel önermenin yanlış olduğuna ikna olmak için şekil çizerek ya da deneme yaparak açıklama yapacağını belirtmiştir. Buna göre Buse'nin ters örnekler hakkındaki bilgisinin yeterli düzeyde olmadığı söylenebilir. Tablo 9 dikkatle incelendiğinde öğretmen adaylarının bazıları sadece bir kategoride iken bazılarının ise birden çok kategori içinde oldukları tespit edilmiştir. Örneğin Aziz ve Adem bir önermenin doğru olduğuna sadece ispat yapmaları durumunda ikna olacaklarını belirtmişlerdir. Barış, Belma ve Buse şekilleri ve örnekleri kullanarak bir önermenin doğru olduğu kanaatine varacaklarını ifade etmişlerdir. Ahu ikna olmak için tanımları ve teoremleri kullanırken Bilge tanım ve teoremlerin yanı sıra örnekleri de kullanacağını belirtmiştir. Aysun ise tanım ve teoremlerle birlikte doğruluğa ikna olmak için ispata da başvurabileceğini dile getirmiştir.

Öğretmen adaylarının matematiksel önermelerin doğruluğuna nasıl ikna olduklarına yönelik görüşlerinin ortaya çıkarılmasının ardından, doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını nasıl savunduklarına yönelik görüşleri alınmıştır. Öğretmen adaylarının ifadeleri oluşturdukları argümanların gerekçeleri kapsamında incelenmiştir. Öğretmen adaylarının doğru olduğunu düşündükleri matematiksel iddialarını savunurken kullandıkları gerekçelere yönelik görüşlerinin dört kategoriye ayrıldığı belirlenmiştir. Tablo 10'da bu kategoriler hakkındaki bilgiler sunulmuştur.

Tablo 10. Öğretmen adaylarının Doğru Olduğunu Düşündükleri Matematiksel İddialarını Savunurken Kullandıkları Gerekçelere Yönelik Görüşleri

Kategoriler	Alt Kategoriler	Öğretmen adayları	Örnek ifadeler
Dedüktif gerekçe	Tanımlar	Ahu Adem Aziz Bilge Aysun	*Adem: Şimdi nasıl savunayım ki onu? Tanımları kullanırım yani. Ondan sonra ona yönelik bir örnek sunarım. Örneği doğrulama yapmak için değil açıklama yapmak için kullanırım.*
	Teoremler	Ahu Aziz Aysun	*Aysun: Örneğin tanımları kullandığım zaman kimse bir şey diyemez. Bu tanımdan dolayı böyledir derim ya da bir önceki teoremden dolayı derim. Yani onlarla ikna olabilirler.*
Görsel gerekçe	Şekiller	Belma Bilge Buse	*Buse: Mesela sürekliliği anlatırken hocalarımız şekil çiziyor onları kullanırım. Noktalar çiziyor burada herhangi bir kesiklik varsa veya iki parçaysa sürekli değildir diyor. Buna bakarım türevli olabilmesi için bu gereklidir derim. Şekilleri kullanırım oradan daha açık olur.*
Tümevarımsal gerekçe	Örnekler	Barış Bilge	*Barış: Daha fazla örnek vererek genelleme yaparak.*

Tablo 10 incelendiğinde öğretmen adaylarının yarısından fazlası (Ahu, Adem, Aziz, Bilge, Aysun) iddialarını savunurken ürettikleri argümanlarında tanımları gerekçe olarak kullandıklarını ifade etmişlerdir. Öğretmen adaylarından üçü (Ahu, Aziz, Aysun) argümanlarında teoremleri gerekçe olarak kullandıklarını belirtmişlerdir. Buna göre öğretmen adaylarının çoğunun iddialarını savunmak için ürettikleri argümanlarda dedüktif gerekçeler kullandıkları yönünde görüş bildirdikleri ortaya çıkmıştır. Yine öğretmen adaylarından üçü (Belma, Bilge, Buse) matematiksel iddialarını savunurken argümanlarında gerekçe olarak şekilleri kullandıklarını dile getirmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının ürettikleri argümanlarda görsel gerekçeler kullandıkları söylenebilir. Öğretmen adaylarından ikisi (Barış, Bilge) argümanlarında örneklere, gerekçe olarak yer verdiklerini belirtmiştir. Bu öğretmen adayları ürettikleri argümanlarda tümevarımsal gerekçeleri kullandıklarını dile getirmişlerdir. Bazı öğretmen adayları sadece tek gerekçeyi kullandıklarını ifade ederken bazı öğretmen adayları argümanlarında birden çok tipte argümana yer verdiklerini belirtmişlerdir. Adem argümanlarında sadece tanımları gerekçe olarak kullandığını belirtirken, Barış sadece örnekleri, Belma ve Buse de sadece şekilleri kullandığını ifade etmişlerdir. Ahu, Aziz ve Aysun argümanlarında tanım ve teoremleri kullandıklarını belirtmişlerdir. Bilge ise tanımların yanında şekil ve örnekleri de matematiksel iddialarını savunurken gerekçe olarak kullandığını ifade etmiştir.

Sonuç, Tartışma ve Öneriler

İspata yönelik görüşler genel olarak değerlendirildiğinde, öğretmen adaylarının ispatın anlamına, matematikteki amacına ve önemine yönelik görüşlerinin çoğunlukla olumlu olduğu tespit edilmiştir. Öğretmen adaylarının ispatlarda başarılı olunabilmesi için yapılması gerekenlere ve matematiksel ispatların kendilerine matematiksel anlamda yarar sağlayıp sağlamadığına yönelik görüşleri alındığında, bazı öğretmen adaylarının ispata karşı ön yargıları ve olumsuz görüşleri ortaya çıkmıştır. Öğretmen adaylarından Ahu, Aziz, Adem ve Aysun'un ispatın amacı, önemi ve matematiksel anlamda kendilerine sağladığı faydaların farkında oldukları belirlenmiştir. Buna göre öğretmen adaylarının ispata yönelik olumlu tutum içinde oldukları söylenebilir. Belma, Barış ve Buse ise ispatın amacına ve önemine ilişkin olumlu görüşler belirtirken matematiksel ispatların öğretim amacının ezber yapmak olduğunu, bunun için de ispatlara en iyi çalışma metodunun ezberlemek olduğunu ifade etmişlerdir. Şu ana kadar öğrendikleri ispatların kendilerine matematiksel anlamda bir yararının olmadığını dile getirmişlerdir. Bu bakımdan Belma, Barış ve Buse'nin ispata karşı olumsuz bir tutum içinde oldukları ortaya çıkmıştır. Bilge ise matematiksel ispatın anlamına yönelik olumsuz görüş olarak değerlendirilebilecek anlamlar yüklemiş ve ispatlarda başarılı olabilmek için ezberlenmesinin gerekli olduğunu belirtmiştir.

Bilge'nin aynı soru için hem olumlu hem de olumsuz görüş bildirdiği belirlenmiştir. Buna göre Bilge'nin ispata yönelik ne olumlu ne de olumsuz bir tutum içinde olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Çalışmadan elde edilen bu genel durum, matematik öğretmeni adaylarının ispata yönelik görüşlerinin tam olarak oluşmadığı yönündeki çalışma sonuçlarını desteklemiştir (Doruk ve Güler, 2014; Moralı vd., 2006). Çalışmada öğretmen adayları ispatın fonksiyonlarına yönelik olumlu görüşler bildirirken ispatın matematik eğitimindeki yerine yönelik görüşlerinin aynı oranda olumlu olmadığı tespit edilmiştir. Çalışmadan elde edilen bu sonuç, Knuth'un (2002) çalışmasından elde ettiği sonucu akıllara getirmiştir. Knuth (2002) çalışmasının sonucunda, matematik öğretmenlerinin ispatın matematikteki rolüne yönelik birçok görüş belirtmelerine rağmen (doğrulama, açıklama, iletişim, keşfetme, sistemizasyon) ispatın matematik öğretimindeki rolüne yönelik görüş bildirmedikleri ortaya çıkmıştır.

İspata karşı olumlu görüşe sahip olan öğretmen adayları matematiksel önermelere ikna olurken ve matematiksel iddialarını savunurken ürettikleri argümanlarda genellikle dedüktif gerekçeler kullandıklarını belirtmişlerdir. İspata karşı olumsuz tutum içinde olan öğretmen adaylarının da ürettikleri argümanlarda çoğunlukla tümevarımsal gerekçeler kullandıklarını dile getirmişlerdir. İspata karşı olumlu ya da olumsuz tam bir tutum geliştiremeyen Bilge, bu yapısını matematiksel önermelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için ürettiği argümanlarda kullandığı gerekçelere yönelik görüşlerine yansıtmıştır. Bilge ürettiği argümanlarda birden çok tipte gerekçe kullanacağını dile getirmiştir. Çalışmanın bu bulguları, ispata yönelik görüşlerin matematiksel önermelere ikna olmak ve iddialarını savunmak için üretilen argümanların yapısını etkileyebileceği ile ilgili ipucu vermiştir. Öğretmen adaylarının argümanları tanımları anlamak, ispat yapmak ve problem çözmek için kullanabileceği düşünüldüğünde (Dinçer, 2011), ispata yönelik görüşlerin bu tarz aktivitelerdeki tekrarlama ya da başarı durumunu etkileyebileceği düşünülmüştür. Bu durumda öğretmen adaylarının ispata yönelik görüşlerinin olumlu olması adına ispat ağırlıklı derslere önem verilmeli, ispatın anlamı, önemi, yararı, matematik ve matematik eğitimindeki rolü açıklanmalıdır. Bu sayede, öğretmen adaylarına ispatın matematiğin ruhu olduğu (Schoenfeld, 2009) ve özünün ispatlarda yattığı (Ross, 1998) hissettirilebilir.

Kaynakça

Alcock, L., & Weber, K. (2005). Proof validation in real analysis: Inferring and evaluating warrants. *Journal of Mathematical Behavior*, *24*(2), 125-134.

Baki, A. (2014). *Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi*. (5. Baskı). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılık.

Bayazıt, N. (2009). *Prospective mathematics teachers' use of mathematical definitions in doing proof.* Unpublished Doctoral Dissertation, Florida State University, Florida.

Bell, A.W. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, *7*(1), 23-40.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). *Proofs problems in elementary number theory: Analysis of trainee teachers' productions*. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), Proceedings ofthe Fifth Congress ofthe European Societyfor Research in Mathematics Education (pp. 591-600). Cyprus, Larnaca.

Dede, Y., & Karakuş, F. (2014). Matematiksel ispat kavramına pedagojik bir bakış: Kuramsal bir çalışma. *Adıyaman Üniversitesi Eğitim Bilimleri Dergisi, 4*(7), 47-71.

Dinçer, S. (2011). *Matematik lisans derslerindeki tartışmaların toulmin modeline göre analizi*. Yayımlanmamış doktora tezi. Hacettepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

Doruk, M., & Güler, G. (2014). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Uluslararası Türk Eğitim Bilimleri Dergisi, Ekim,* 71-93.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2013a). İlköğretim matematik öğretmeni adaylarının matematiksel ispata yönelik görüşleri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi*, *2*(1), 241-252.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2013b). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Dizilerin Yakınsaklığı Kavramı Üzerine

İspat Değerlendirme Becerileri. *Eğitim ve Öğretim Araştırmaları Dergisi, 2*(1), 241-252.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2015a). The relationship among pre-service mathematics teachers' conceptual knowledge, opinions regarding proof and proof skills. *Mevlana International Journal of Education, 5*(1), 45-57.

Doruk, M., & Kaplan, A. (2015b). Prospective mathematics teachers' difficulties in doing proofs and causes of their struggle with proofs. *Bayburt Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 10*(2), 315-328.

Furinghetti, F., & Morselli, F. (2009). Every unsuccessful problem solver is unsuccessful in his or her own way: affective and cognitive factors in proving. *Educational Studies in Mathematics, 70*(1), 71-90.

Güler, G. (2013). Matematik öğretmeni adaylarının cebir öğrenme alanındaki ispat süreçlerinin incelenmesi. Yayımlanmamış doktora tezi. Atatürk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Erzurum.

Güler, G., Özdemir, E., & Dikici, R. (2012). Öğretmen adaylarının matematiksel tümevarım yoluyla ispat becerileri ve matematiksel ispat hakkındaki görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 20(1),* 219–236.

Güven, B., Çelik, D., & Karataş, İ. (2005). Ortaöğretimdeki çocukların matematiksel ispat yapabilme durumlarının incelenmesi. *Çağdaş Eğitim Dergisi, 316,* 35-45.

Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematical knowledge. *ZDM Mathematics Education, 40,* 345–353.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 389-399.

İmamoğlu, Y. (2010). *Birinci ve son sınıf matematik ve matematik öğretmenliği öğrencilerinin ispatla ilgili* *kavramsallaştırma ve becerilerinin incelenmesi*. Yayımlanmamış doktora Tezi, Boğaziçi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, İstanbul.

Jones, K. (2000). The student experience of mathematical proof at university level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 53-60.

Kayagil, S. (2012). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri ve bu görüşlerin bazı değişkenlere göre incelenmesi. *International Journal of New Trends in Arts, Sports & Science Education, 1(2),* 134-141.

Knuth, E. (1999). *The nature of secondary school mathematics teachers*' *conceptions of proof*. (Unpublished doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertations and Theses database. (UMI No. 9938829)

Knuth, E. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(5), 379-405.

Ko, Y.Y., & Knuth, E. (2009). Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 68-77.

Mariotti, M. A., & Balacheff, N. (2008). Introduction to the special issue on didactical and epistemological perspectives on mathematical proof. *ZDM Mathematics Education, 40,* 341–344.

Martin, G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education, 20,* 41-51.

McIntosh, C. (Ed.). (2013). *Cambridge Advenced Learner's Dictionary.* (4th edition). UK: Cambridge University Press.

Moore, R.C. (1994). Making the transition to formal proof. *Educational Studies in Mathematics. 27,* 249-266.

Moralı, S., Uğurel, I., Türnüklü, E., & Yeşildere, S. (2006). Matematik öğretmen adaylarının ispat yapmaya yönelik görüşleri. *Kastamonu Eğitim Dergisi, 14*, 1, 147-160.

Morris, A.K. (2002). Mathematical Reasoning: Adults' ability to make the inductive- eductive distinction. *Cognition and Instruction, 20*(1), 79-118.

Oxford University. (2010). *Advenced Learner's Dictionary (International students' edition).*(8th edition). New York: Oxford University Press

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof?. *Educational Studies in Mathematics, 52(3)*, 319-325.

Rav, Y. (1999). Why do we prove theorems?. *Philosophia Mathematica, 7(1)*, 5–41.

Riley, K.J. (2003). *An investigate of prospective secondary mathematics teachers' conceptions of proofand refutations* (Doctoral dissertation). Available from ProQuest Dissertation and Theses database. (UMI No. 3083484)

Ross, K.A. (1998). Doing and proving: The place of algorithms and proofs in school mathematics. *The American Mathematical Monthly, 105*(3), 252-255.

Schoenfeld, A.H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Schoenfeld, A.H. (2009). Series editor's foreword: The soul of mathematics. In D. Stylianou, M. Blanton, & E. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proofacross the grades: A K-16 perspective* (pp. xii-xvi). New York, NY: Routledge.

Segal, J. (2000). Learning about mathematical proof: Conviction and validity. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(2), 191-210.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Stylianides, A.J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(3), 289-321.

Tucker, T.W. (1999). On the role of proof in calculus courses. *Contemporary issues in mathematics education*, *36*, 31-35.

Türk Dil Kurumu [TDK]. (2015). *Türkçe Sözlük.* Ankara: Türk Dil Kurumu Yayınları

Uygan, C., Tanışlı, D., & Köse, N. Y. (2014). İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Kanıt Bağlamındaki İnançlarının, Kanıtlama Süreçlerinin ve Örnek Kanıtları Değerlendirme Süreçlerinin İncelenmesi. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *5*(2), 137-157.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(1), 101-1 19.

Weber, K. (2005). Problem solving, proving and learning: the relationship between problem solving processes and learning opportunities in the activity of proof construction. *Journal of Mathematical Behaviour*, *24*, 351-360.

Yıldırım, C. (2014). *Matematiksel düşünme. (10. Baskı).* İstanbul: Remzi Kitapevi.

Zaslavsky, O., & Peled, I. (1996). Inhibiting factors in generating examples by mathematics teachers and student teachers: The case of binary operation. *Journal for Research in Mathematics Education*, 67-78.

BÖLÜM III

Creativity in Mathematics Education

Rüveyda KARAMAN DÜNDAR

Introduction

In the twenty-first century's dynamic landscape, the importance of creativity cannot be emphasized enough. Creativity holds immense significance in the present-day context, broadly and specifically within mathematics. Creative thinking has become a paramount skill in the 21st century, standing out as a distinctive and indispensable trait of human beings (the Partnership for 21st Century Skills, 2008). It has become a driving force in education, with a particularly noteworthy role in the field of mathematics (Leikin et al., 2013).

Historically, creativity has emerged as a uniquely personal and social characteristic, playing a key role in advancing human endeavors at all levels (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). Creativity is multifaceted and has been examined by various scholars from diverse perspectives. The understanding of creativity in the research community has evolved significantly over time, with scholars exploring the concept from various angles (Guilford, 1967; Haylock, 1987; Leikin et al., 2013). Consequently, there is no singular, authoritative perspective or definition of creativity, and viewpoints on creativity continue to evolve (Mann, 2006; Sriraman, 2009).

Guilford's (1967) conceptualization introduced an essential distinction between convergent and divergent thinking (production), setting the stage for understanding the details of creative thought. Convergent thinking aims to reach a single, precise solution to a given problem, emphasizing focused and linear problem-solving. On the other hand, divergent thinking involves the imaginative generation of multiple responses, promoting flexibility of thought. This open-ended approach encourages the exploration of diverse possibilities, extending the boundaries of conventional solutions. Guilford's framework highlights the dynamic interplay between these thinking processes and emphasizes their roles in both problem-solving and creative imagination.

Building upon Guilford's foundation, Torrance (1966) defined creativity as a dynamic process characterized by increased sensitivity to problems, knowledge gaps, conflicts, and challenges. This comprehensive process involves identifying difficulties, searching for solutions, formulating and testing hypotheses, exploring potential modifications, and communicating results. Torrance developed a Test of Creative Thinking to assess and measure creativity, evaluating performance in verbal and figural tasks. This assessment includes fluency, flexibility, originality, and elaboration criteria. Fluency involves the seamless flow of ideas, drawing on foundational knowledge. Flexibility pertains to approaching problems from diverse angles, generating a spectrum of solutions. Originality is characterized by novel, unique ways of thinking and creating original products. Elaboration focuses on the capacity to describe, illuminate, and generalize ideas.

Notably, among these components, originality undertakes particular significance. Creativity signifies the creation of new and original products when viewed as a process rooted in generating unique ideas, approaches, or actions (Leikin & Lev, 2013).

Creativity and giftedness

The interplay between creativity and giftedness is complex, reflecting diverse perspectives within the literature. The complex relationship between creativity and giftedness in educational research is revealed through various lenses. Some researchers argue that creativity represents a distinct form of giftedness, while others suggest that it is an integral aspect of giftedness. On the contrary, some advocate for the independence of these two characteristics in individuals (Leikin & Pitta-Pantazi, 2013). The literature presents various models to illustrate the relationship between creativity and the development of gifted behavior. Some researchers position creativity as a distinct subtype of giftedness (Sternberg, 2005), while others argue for its integral role within the broader context of giftedness (Renzulli, 1987).

Renzulli's three-ring model, proposed in 1978, positions creativity as a critical factor alongside above-average ability and task commitment to notice gifted behavior. In this model, creativity encompasses fluency, flexibility, originality of thought, and traits such as openness to experience and a willingness to take risks. Task commitment is essential for translating motivation into action, serving as a prerequisite for achieving high levels of accomplishment. This model underscores the intricate connections between creativity, intellectual ability, and sustained effort in realizing gifted potential.

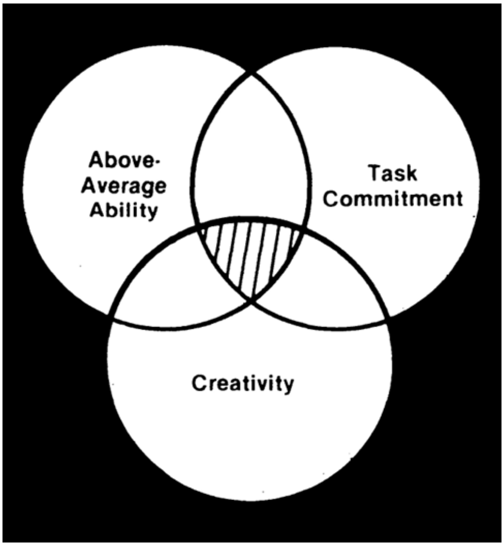

Figure 1. Renzullli's Model of Giftedness (Renzulli, 1987, p. 182)

The Triarchic Theory of Intelligence, articulated by Sternberg (2005), outlines three components—analytical, creative, and practical abilities—as integral to success within sociocultural contexts. Within this model, creativity is defined as the capacity to produce unexpected and original work that is useful and adaptive, emphasizing the importance of practicality and adaptability in the creative process.

Shifting the focus to creative actions, the Actiotope Model proposed by Ziegler (2005) suggests that creativity is not limited to an individual's mind but is embedded in a system involving interaction with a cultural domain and a social field. The Actiotope Model underscores the interconnectedness of creativity with cultural and social contexts, emphasizing the role of external influences in shaping and fostering creative endeavors.

Among the models exploring creativity and giftedness, a common thread emerges the acknowledgment that the interplay between personality traits and environmental factors holds substantial power over the realization of creative talent. This perspective aligns with Vygotsky's (1930/1984) view of creativity as a fundamental mechanism facilitating the development of new knowledge. As these varied models align to acknowledge the profound connection between creativity, individual traits, and external contexts, a holistic perspective on the intricate relationship between creativity and giftedness comes into focus.

Creativity in Mathematical Context

Creativity manifests in general and specific forms, where general creativity involves the application of problem-solving approaches across various fields. On the other hand, specific creativity is domain-specific, considering the unique characteristics and requirements of a particular field or discipline. These distinct manifestations highlight the adaptability of creative thinking across diverse contexts and the altered nature of creativity within specific domains. Mann (2006) highlights the absence of a universally accepted definition for mathematical creativity as a significant difficulty, impeding progress in research endeavors and hindering exploration within academic contexts. Creative thinking processes in mathematics can be comprehensively understood through three overarching dimensions. Within the mathematical realm, divergent thinking is characterized by the ability to generate multiple problem-solving approaches, propose additional solutions, and apply mathematical concepts in diverse contexts and varied ways (Campbell, 1997; Leikin, 2009, 2014).

The traditional approach to teaching mathematics, marked by procedural methods and step-by-step instruction, may hinder students' understanding of mathematical concepts and impede their creativity (Sriraman, 2009). Without grasping foundational experiences, students learn the process without comprehending its effectiveness. Consequently, they follow instructions to find a solution considered correct by the teacher, missing opportunities for discovery, mathematical discourse, and conceptual analysis. Recognizing the potential drawbacks of procedural teaching highlights the need to promote creativity, ultimately enhancing classroom engagement (Tabach & Friedlander, 2017).

The intricate relationship between mathematical giftedness and creativity stems from the branching in perspectives, with some considering mathematical creativity as an inherent trait of professional mathematicians (Sriraman, 2009). In contrast, others believe that mathematical creativity is attainable for all students, emphasizing its developmental nature (Sheffield, 2009). This duality underscores the complexity of understanding and defining the interplay between mathematical giftedness and creativity. Subotnik et al. (2009) posit that creativity plays a vital role in the endeavors of professional mathematicians, guiding them in exploring and resolving complex problems within the field. In alignment with this, Ervynck (1991) conceptualizes mathematical creativity as an integral facet of advanced mathematical thinking. This diversity in perspectives contributes to the ongoing discourse on cultivating mathematical creativity, providing valuable insights into the intricate process of nurturing creative thinking among professionals and students. The multifaceted nature of mathematical creativity, encompassing problem-solving, advanced thinking, and relationship identification, underscores its complexity within mathematics. These perspectives highlight the need for a comprehensive approach to fostering creativity within the discipline.

Silver (1997) and Sheffield (2009) advocate for the inclusive cultivation of creativity for all students. They assert that problem-solving and problem-posing are essential for fostering mathematical creativity across diverse student populations. Sheffield (2009) adopts a developmental perspective, outlining a progression of mathematical proficiency. This developmental continuum reflects the evolving levels of creative ability in mathematics, highlighting the significance of these cognitive processes in universal mathematical creativity. Silver (1997) suggests that math instruction enriched with creativity can enhance students' representational skills, strategic fluency, flexibility, and openness to new problems or solutions. This approach facilitates the engagement of diverse students with fundamental creative aspects, particularly fluency, flexibility, and originality. The context plays a crucial role in enhancing mathematical creativity throughout this process.

In examining creativity-oriented tasks within mathematics curricula, Bicer et al. (2021) analyzed mathematical tasks found in middle school textbooks, explaining distinct dimensions inherent in creativity-directed tasks. The identified dimensions encompassed several categories: open-ended tasks, problem posing, connections/connected tasks, visualization, extension/extendable tasks, and communication.

Open-ended problems refer to incomplete mathematical problems, allowing multiple interpretations and solutions. These problems encourage creativity by providing various opportunities for diverse solution methods, mathematical modeling, completing necessary information, and generating multiple correct answers (Leikin, 2009). Another category considered in the Bicer et al. (2021) analysis is problem-posing, a broad concept often involved in discovering new mathematical problems or rephrasing existing ones (Silver, 1994, 1997).

Connections/connected tasks, as conceptualized in Bicer et al.'s study (2021), refer to mathematical tasks that establish relationships between distinct mathematical topics, incorporate real-life contexts, and demonstrate the application of mathematics in diverse disciplines. Visualization is another category crucial in enhancing creative thinking skills in mathematics. Recommending the use of hands-on materials, manipulatives, graphic calculators, drawings, and computers for visualizing mathematical concepts, the framework in Bicer et al. (2021) study incorporates three specific subcategories: drawings, hands-on materials and technology integration within the overarching category of visualization.

Extensions/extendable tasks emphasize fostering conceptual comprehension, highlighting the abstract nature of mathematics, and encouraging generalizing mathematical statements or problems beyond mere computation (Bicer et al., 2021). Such tasks prompt students to cultivate creative ideas by identifying mathematical patterns through various approaches, moving beyond the focus on rapid computation (Mann, 2006). Mathematics communication tasks involve activities requiring students to interact with others, such as peers or teachers, because tasks designed to enhance mathematical creativity often require students to express and communicate their ideas effectively. Within the communication category, two subcategories are included: reflective tasks and collaborative tasks. Reflective tasks prompt students to articulate their ideas and perspectives using various communication modes like drawing or writing. On the other hand, collaborative tasks encourage students to work collectively with their peers or in groups to solve mathematical problems (Bicer et al., 2021).

The framework Bicer et al. (2021) developed to analyze creativity-directed tasks in mathematics curriculum includes various dimensions of mathematical creativity. However, in the domain of school mathematics, the expression of mathematical creativity is commonly associated with the activities of problem solving and problem posing. Drawing inspiration from Torrance's framework (1974), Silver (1997) proposed a methodology for nurturing creativity through problem solving. This approach involves enhancing fluency by generating multiple mathematical ideas and answers, fostering flexibility by devising new mathematical solutions, and cultivating originality by exploring diverse problem-solving strategies. Creative problem solving in mathematics is linked to mental flexibility (Krutetskii, 1976; Leikin, 2009; Silver, 1997).

To develop students’ problem-posing and problem-solving skills in creative ways, teachers can create projects with a design thinking framework. Design thinking is a problem-solving and innovation framework emphasizing empathy, defining a problem, developing a solution, collaboration, experimentation, and iteration (Stanford’s d.school, 2015). While it is traditionally associated with product and service design, its principles can be adapted and applied to various domains, including mathematics education (Bush et al., 2016; Karaman Dundar, 2022; Lee, 2018). Design thinking places a strong emphasis on solving real-world problems. In mathematics education, connecting mathematical concepts to real-life scenarios enhances students' understanding and fosters creative application (Bush et al., 2018). Therefore, teachers can design projects with a design thinking framework to bridge the gap between theoretical mathematics and practical, real-world challenges (Bush et al., 2018). By incorporating the design thinking framework into mathematics education, teachers can nurture students' creativity, critical thinking, and problem-solving skills holistically and engagingly (Lee, 2018).

Creative Learning Environment

The learning environment encompasses the physical and psychological aspects of learning. The classroom atmosphere should be student-centered, open to new ideas, supported by diverse materials, and allow student interaction. This environment should encourage active student participation, fostering a supportive learning experience (Davies et al., 2013; Maker & Schiever, 2010).

Several studies highlight the pivotal role of the physical environment within a classroom or workshop in nurturing students' creativity (Bancroft et al., 2008; Davies et al., 2013). Designing these spaces flexibly and enabling versatile use to encourage creativity are recommended (Maker & Schiever, 2005). In early years, this may entail moving away from specifically themed role-play areas, providing children with greater imaginative exploration freedom (Davies, 2011). Active involvement of children and their parents in planning and resourcing these spaces is seen as beneficial (Davies et al., 2013).

Emphasizing an open and spacious atmosphere and removing excess furniture are recommended to enable students to navigate freely and utilize different areas for idea generation (Bancroft et al., 2008). Sensory qualities such as light, color, sound, and micro-climate are also crucial in learning environments (Vecchi, 2010). These elements significantly influence children's and young people's perceptions of their creative capabilities within these spaces.

Another notable aspect of the visual environment is the display of work in progress, as it has been shown to stimulate pupils' creativity (Addison et al., 2010). Displaying ongoing projects contributes to a dynamic and evolving visual landscape that can inspire and motivate students in their creative endeavors (Davies et al., 2013).

Numerous studies underscore the pivotal role of providing diverse materials, tools, and resources in stimulating creativity (Addison et al., 2010; Bancroft et al., 2008; Maker & Schiever, 2010). For older students, access to enhanced or specialized resources may increase their creativity. Furthermore, information and communication technology resources, such as interactive whiteboards, have been identified as supportive tools for visual learners to develop their creative skills (Davies et al., 2013; Wood & Ashfield, 2008). This acknowledgment highlights the multifaceted role of technology in fostering creativity in diverse educational contexts.

The pedagogical environment also plays a pivotal role in shaping children's creative performance. A school's overall learning atmosphere significantly influences children's creativity (Davies et al., 2013; Maker & Schiever, 2010). While the significance of task characteristics in fueling creativity is evident (Bicer et al., 2021; Krutetskii, 1976), research suggests that the learner's role in the task is equally, if not more, crucial. Studies indicate that giving children and young people some control over their learning, with appropriate support and a balance between structure and freedom, enhances creativity (Cremin, 2009; Davies et al., 2013; Cremin et al., 2006; Sak, 2009). This emphasizes the dynamic interplay between the learning environment, task characteristics, and learner autonomy in fostering creativity within educational settings. Cremin et al. (2006) highlight the importance of providing numerous opportunities for children to initiate activities or make choices within loosely framed activities. However, finding a delicate balance between structure and freedom is crucial to fostering creativity effectively in educational settings.

Similar to the impact of physical environments, substantial evidence supports the idea that creativity is maximized through the flexible allocation of time (Addison et al., 2010; Cremin et al., 2006; Davies et al., 2013; Sak, 2009). These studies suggest that special arrangements for extended time periods for creative activities can bring to the value of creative learning.

The nature of the relationship between teachers and learners is another integral aspect contributing to an encouraging educational environment. Cremin et al. (2006) noted in their study that teachers play a crucial role in enabling children's creative activities through their responses. Furthermore, creativity is influenced by teachers' expectations and how children perceive those expectations (Cremin, 2009). Embracing professional autonomy and curiosity exhibit a creative mindset and value originality. Creative teachers prioritize cultivating creativity and seek to instill a creative mindset in students. This endeavor prepares the next generation for an uncertain world because creative teachers emphasize the importance of creative thinking in navigating evolving challenges (Cremin, 2009).

The significance of dialogue in the pedagogical relationship is also evident since dialogue fosters a culture and community that thinks together (Davies et al., 2013). The comparison of ideas and actions is a favorable condition for creativity. In addition to supportive relationships with teachers, collaborative work, and group and peer teamwork provide opportunities for students' creativity (Davies et al., 2013; Maker & Schiever, 2010).

Digital Platforms and Interactive Tools

Educational virtual resources have gained recognition for their ability to engage elementary and middle school students and promote logical thinking and problem-solving skills (Moyer-Packenham & Westenskow, 2016). Virtual tools such as Geogebra, Toytheatre, and Mathigon can foster students' creativity in mathematics by providing interactive and dynamic learning environments. GeoGebra (https://www.geogebra.org/) is a dynamic mathematics software that integrates geometry, algebra, spreadsheets, graphing, and more. It allows students to explore mathematical concepts visually and interactively. GeoGebra enables students to visualize mathematical concepts, making abstract ideas more tangible. Students can manipulate objects and parameters, encouraging them to explore different scenarios and solutions. Furthermore, interactivity in GeoGebra promotes a deeper understanding of mathematical relationships and connections.

ToyTheater (https://toytheater.com/) is an online platform offering educational games and interactive activities for young learners in mathematics. Its interactive and playful activities engage students in a creative learning process. The platform also provides diverse tools that cater to different learning styles, stimulating creativity. Lastly, educational games can enhance problem-solving skills and creative thinking.

Mathigon (https://mathigon.org/) is an online mathematics platform that provides interactive content, courses, and exploratory modules. Mathigon's interactive modules encourage hands-on exploration, promoting creativity. The platform often presents mathematical concepts in real-world contexts, fostering creative applications. Mathigon adapts to individual learning paths, allowing students to explore topics at their own pace supporting creative problem-solving.

There might be other digital platforms and interactive tools available. However, it is essential to note that while these tools can contribute to creativity in learning, educators must design activities that encourage creativity in conjunction with these digital resources. Educators should create activities that go beyond mere tool usage. The focus should be on developing tasks that stimulate critical thinking, problem-solving, and creative expression. Educators can encourage students to question, analyze, and evaluate information. Digital tools should be used as instruments to facilitate critical thinking. Educators can design tasks requiring students to apply mathematical concepts to solve real-world problems. Digital platforms can provide a dynamic environment for students to experiment with solutions. Educators can ask students to express their understanding of mathematical concepts in creative ways. That can include visual representations, storytelling, or creating multimedia presentations. In essence, the effectiveness of digital tools in fostering creativity lies in the hands of educators who shape the learning experiences. The thoughtful design of activities and intentional pedagogical approaches can maximize the positive impact of these tools on students' critical thinking and creative expression.

Cultural Perspectives on Mathematical Creativity

Diverse cultural viewpoints, influenced by cultural backgrounds, educational systems, and societal values, contribute to varied perspectives on mathematical creativity. It's crucial to note that mathematical creativity is not a universally defined concept; its interpretation and expression can differ significantly among different cultures. To illustrate, the study of Leikin et al. (2013) revealed that teachers from diverse countries observed a strong interconnection among students' mathematical creativity. Across several countries, teachers highlighted students' abilities to formulate conjectures, identify patterns, and think independently as reflective of robust investigative skills. The correlation between mathematical flexibility—embracing varied problem-solving approaches—and affective elements like deriving pleasure from problem exploration was a common thread. The study showed that flexibility was linked to student motivation, enjoyment in tackling diverse problems, and a proactive approach to seeking new information.

Moreover, teachers from different countries emphasized the significance of success in problem-solving, proving it to be a vital indicator of mathematical creativity. This encompassed proficiency in unconventional problems, theorem proving, Olympiad success, and students' generation of original solutions. Across the board, mathematical originality surfaced as a critical aspect with discoveries, unconventional problem-solving success, and formulating challenging questions. This diversity in perspectives underscores the nuanced nature of mathematical creativity.

Despite cultural differences, Leikin et al. (2013) highlight commonalities in teachers' conceptions of creativity in mathematics teaching. Teachers universally recognize the link between educators' creativity, the depth of their mathematical knowledge, and the association between creativity and problem-solving skills. They suggest that fostering creativity in school mathematics requires comprehensive attention to educational policy, instructional materials, and teacher education while considering variations in educational systems. Thus, understanding these cultural perspectives on creativity is essential for educators and researchers seeking to enhance mathematical creativity in diverse educational settings. Recognizing and respecting different cultural lenses can lead to more inclusive approaches to fostering mathematical creativity worldwide.

Conclusion

In conclusion, the 21st century's emphasis on creativity, particularly within mathematics, reflects a paradigm shift that underscores creativity's crucial role in shaping contemporary educational environments. The historical trajectory of creativity reveals an intricate interplay by various models. Mathematical creativity, as evidenced, is not a single piece concept but rather a dynamic and multifaceted phenomenon that manifests across both general and specific applications. The complex relationship between mathematical giftedness and creativity exposes a spectrum of perspectives and emphasizes the necessity for a comprehensive strategy to cultivate creativity within the mathematics discipline effectively.

Creativity is crucial in educational paradigms, profoundly influencing learning environments. These environments, strictly shaped by physical and pedagogical elements, emerge as vital for fostering creativity in mathematics. Furthermore, integrating digital platforms into educational practices adds another enrichment layer to enhance the creative learning experience. Recognizing diverse cultural perspectives on mathematical creativity highlights the need for inclusive approaches integrating different viewpoints. Therefore, educators and researchers must collectively acknowledge the multifaceted nature of mathematical creativity. This collaborative effort has the potential to advance inclusive and effective educational practices globally and ensure that creativity remains a driving force in mathematics education.

References

Addison, N., Burgess, L., Steers, J., & Trowell, J. (2010). *Understanding Art Education: Engaging reflexively with practice.* London: Routledge.

Bancroft, S., Fawcett, M., & Hay, P. (2008). *Researching children researching the world: 5 × 5 × 5 = creativity*. Trentham: Stoke-on-Trent.

Bicer, A., Marquez, A., Colindres, K. V. M., Schanke, A. A., Castellon, L. B., Audette, L. M., ... & Lee, Y. (2021). Investigating creativity-directed tasks in middle school mathematics curricula. *Thinking Skills and Creativity*, *40*, 1–19

Bush, S. B., Cox, R., & Cook, K. (2016). iSTEM: A critical focus on the M in STEAM. *Teaching Children Mathematics*, *23*(2), 110–114.

Bush, S., Karp, K., Cox, R., Cook, K., Albanese, J., & Karp, M. (2018). Design thinking framework: Shaping powerful mathematics. *Mathematics Teaching in the Middle School, 23*(4), e1–e5.

Campbell, P. F. (1997). Connecting instructional practice to student thinking. *Teaching Children Mathematics*, *4*(2), 106–110.

Cremin, T. (2009). Creative teachers and creative teaching. *Creativity in Primary Education, 11*(1), 36–46.

Cremin, T., Burnard, P., & Craft, A. (2006). Pedagogy and possibility thinking in the early years. *Thinking Skills & Creativity, 1*(2), 108–119.

Davies, D. (2011). *Teaching science creatively*. London: Routledge.

Davies, T. (2006). Creative teaching and learning in Europe: Promoting a new paradigm. *The Curriculum Journal*, 17(1), 37–57.

Davies, D., Jindal-Snape, D., Collier, C., Digby, R., Hay, P., & Howe, A. (2013). Creative learning environments in education—A systematic literature review. *Thinking Skills and Creativity*, *8*, 80–91.

Ervynck, G. (1991). Mathematical creativity. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 42–53). Dordrecht: Kluwer.

GeoGebra (2023, Dec). https://www.geogebra.org/

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Haylock, D. W. (1987). A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics,18,* 59–74.

Jeffrey, B. (2006). Creative teaching and learning: Towards a common discourse and practice. *Cambridge Journal of Education, 36*(3), 399–414.

Karaman Dundar, R., (2022). Design thinking in education. In M. Alanoglu (Ed.), *Education & science 2022* (pp. 39–46). Efe Academy.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Translated from Russian by J. Teller; Edited by J. Kilpatrick & I. Wirszup. Chicago: The University of Chicago Press.

Lee, D. (2018). *Design thinking in the classroom: Easy-to-use teaching tools to foster creativity, encourage innovation, and unleash potential in every student.* Simon and Schuster.

Leikin, R. (2009). Multiple proof tasks: Teacher practice and teacher education. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hana, & M. De Villiers (Vol. Eds.), *The proceeding of the 19 ICMI Study Conference: Proofs and proving in mathematics education: v. 2,* (pp. 31–36). Taiwan: National Taipei University.

Leikin, R. (2014). Challenging mathematics with multiple solution tasks and mathematical investigations in geometry. In Y. Li, E. A. Silver, & S. Li (Eds.). *Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices* (pp. 59–80). Dordrecht, the Netherlands: Springer.

Leikin, R., & Lev, M. (2013). Mathematical creativity in generally gifted and mathematically excelling adolescents: What makes the difference?. *Zdm*, *45,* 183-197.

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: The state of the art. *ZDM*, *45,* 159-166.

Leikin, R., Subotnik, R., Pitta-Pantazi, D., Singer, F. M., & Pelczer, I. (2013). Teachers' views on creativity in mathematics education: an international survey. *ZDM*, *45,* 309–324.

Mathigon, (2023, Dec). https://mathigon.org/

Maker, C. J., & Schiever, S. W. (2005). *Teaching models in education of the gifted* (3rd ed.). Austin, TX: PRO-ED.

Maker, C. J. & Schiever, S. W. (2010). *Curriculum development and teaching strategies for gifted learners* (3rd ed.). Austin, TX: PRO-ED.

Mann, E. L. (2006). Creativity: The essence of mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236–260.

Moyer-Packenham, P. S., & Westenskow, A. (2016). Revisiting the effects and affordances of virtual manipulatives for mathematics learning. In K. Terry, & A. Cheney (Eds.). *Utilizing virtual and personal learning environments for optimal learning* (pp.186–215).

Partnership for 21st Century Skills. (2008). *21st century skills, education & competitiveness: A resource and policy guide*. Retrieved from http://www.p21.org/storage/documents/21st_century_skills_education_and_competitiveness_guide.pdf.

Renzulli, J. (1978). What makes giftedness? Re-examining a definition. *Phi Delta Kappan*, 60, 180–184, 261.

Sak, U. (2009). *Üstün yetenekliler eğitim programları.* Ankara: Maya Akademi.

Sheffield, L. (2009). Developing mathematical creativity—questions may be the answer. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 87–100). Rotterdam: Sense Publishers.

Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics, 14*, 19–28.

Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. *ZDM-International Journal of Mathematics Education, 27*(2), 67–72.

Silver, E. A. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM Mathematics Education, 29*(3), 75–80.

Sriraman, B. (2009). The characteristics of mathematical creativity. *ZDM Mathematics Education, 41*(1-2), 13–27.

Sternberg, R. J. (2005). The theory of successful intelligence. *Interamerican Journal of Psychology, 39*, 189–202.

Subotnik, R. F., Pillmeier, E., & Jarvin, L. (2009). The psychosocial dimensions of creativity in mathematics: Implications for gifted education policy. In R. Leikin, A. Berman, & B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students* (pp. 165–179). Rotterdam: Sense Publishers.

Stanford’s d.school (2023, Dec). https://dschool.stanford.edu/

Sternberg, R. J. (2005). The theory of successful intelligence. *Interamerican Journal of Psychology*, 39, 189–202.

Tabach, M., & Friedlander, A. (2017). Algebraic procedures and creative thinking. *ZDM Mathematics Education, 49*(1), 53.

Torrance, E. P. (1966). *The Torrance tests of creative thinking: Norms-technical manual. Research edition. Verbal tests, forms A and B. Figural tests, forms A and B.* Princeton, NJ: Personnel Press.

ToyTheater, (2023, Dec). https://toytheater.com/

Vecchi, V. (2010). Art and creativity in Reggio Emilia: Exploring the role and potential of ateliers in early childhood education. London: Routledge.

Vygotsky, L. S. (1930/1982). Imagination and its development in childhood. In V. V. Davydov (Ed.), *General problems of psychology. The collected works of L. S. Vygotsky* (Vol. 2, pp. 438–454). Moscow: Pedagogika (in Russian).

Wood, R., & Ashfield, J. (2008). The use of the interactive whiteboard for creative teaching and learning in literacy and mathematics: A case study. *British Journal of Educational Technology, 39*(1), 84–96.

Ziegler, A. (2005). The actiotope model of giftedness. In R. Sternberg & J. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 411–434). Cambridge: Cambridge University Press.

BÖLÜM IV

Mathematical Creativity with Tangrams in Middle School Mathematics

Rüveyda KARAMAN DÜNDAR

Introduction

In the dynamic context of middle school mathematics, the integration of creative and engaging activities is essential to foster a positive learning environment. Tangrams, ancient Chinese geometric puzzles, offer a unique and multipurpose tool that can be employed to enhance mathematical understanding while nurturing creativity among middle school students. This chapter explores tangrams' rich possibilities in promoting creative thinking, problem-solving skills, and geometric reasoning in the middle school classroom.

Background

Tangram is a traditional Chinese puzzle that is an educational instrument designed to enrich children's spatial understanding by illustrating connections between diverse shapes. Tangrams consist of seven flat pieces, which, when arranged together, form a square comprising seven geometric elements: 2 small triangles, 1 medium triangle, 2 large triangles, 1 square, and 1 parallelogram (Figure 1.). These components can be skillfully arranged to construct animals, human figures, and abstract and imaginative shapes, fostering creativity and geometric understanding. These pieces can be rearranged to create countless shapes, enabling spatial reasoning and geometric visualization. Its flexibility spans various educational levels, accommodating learners from early childhood through college. In the initial stages, children interact with tangrams by replicating or creating shapes, gradually progressing to explore shape proportions.

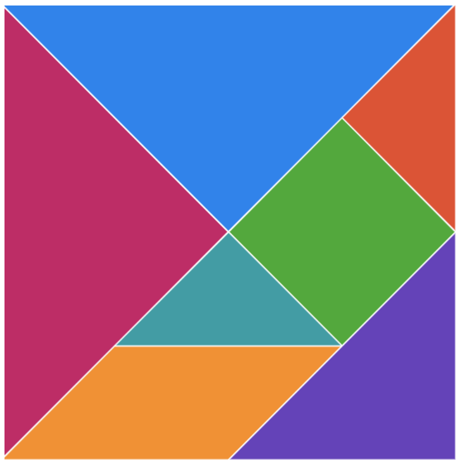

Figure 1. Tangram Pieces

At the elementary school level, tangram activities can be used for intuitive and informal exploration. The reaction of surprise and amazement tangrams elicit from children while assembling figures from the seven tangram pieces highlights their central appeal and educational value. Children enjoy manipulating these geometric shapes and discover that what initially seems like a simple set of pieces can be incredibly fun. The amazement stems from the realization that these seven pieces, when rearranged in various combinations, have the remarkable capacity to form many different figures (Schroth et al., 2020).

However, tangram activities are not limited to simple play; instead, they can enable an understanding of mathematical concepts and principles. Fundamentally, tangram activities could help understand the relationship between side lengths and area, fostering spatial awareness based on this understanding. This reaction highlights the intrinsic appeal and educational value of tangrams. Beyond the entertainment factor, children experience a sense of wonder and discovery as they explore the diverse possibilities inherent in the tangram pieces. This engaging activity captivates children's attention and is a powerful tool for promoting spatial awareness, geometric understanding, and problem-solving skills. Through engaging with tangrams, children enjoy a playful and creative experience and gain valuable insights into the fascinating world of shapes and their configurations (Bohning & Althous, 1997).

Tangrams and Mathematical Concepts

Tangrams provide an engaging context for introducing and reinforcing geometric concepts. Through hands-on exploration, students can internalize ideas related to congruence, similarity, and transformations. The process of manipulating tangram pieces allows students to experience geometric principles physically, making abstract concepts more concrete.

From an educational perspective, Tangram serves as a tool for enhancing a student's understanding of fundamental geometric concepts. Engaging with Tangram puzzles encourages the development of logical reasoning skills, as students must strategically manipulate the pieces to form specific shapes. Tangram significantly contributes to the cultivation of geometrical imagination, encompassing the ability to:

- Perceive and recognize various geometrical shapes.
- Assess the size and spatial orientation of these shapes.
- Visualize a given shape in different spatial configurations.

- Determine alterations in shapes concerning size, structure, and other attributes.
- Construct a mental representation of a shape in space based on its plane projection and verbal description.

In essence, Tangram is a flexible educational tool that imparts geometrical knowledge and nurtures reasoning abilities and rich geometrical imagination in students (Brinckova et al., 2007).

Navigating the intricate arrangement of tangram pieces necessitates applying spatial reasoning skills, compelling students to mentally manipulate and reposition elements through rotation, reflection, and translation. This immersive engagement fosters heightened spatial awareness, a fundamental component of mathematical proficiency, as highlighted by Kamii et al. (2001).

Tangram puzzles inherently embed problem-solving challenges within their framework. Students, presented with a specific shape or task, board on a journey of strategic arrangement to replicate the given shape using the seven tangram pieces. This complex process cultivates critical thinking, logical reasoning, and resilience, encouraging students to explore various solutions, as emphasized by Owens and Clements (1998).

The educational value of Tangrams becomes particularly evident when students are prompted to tackle challenges that push their cognitive boundaries, such as covering a square using a prescribed number of tangram pieces—whether two, four, or five. Confronted with the tangram problem, students are compelled to make thoughtful decisions about the optimal combination of the seven pieces, often relying on a trial-and-error method. This dynamic problem-solving approach deepens their understanding of spatial relationships and prompts them to discern the reasons behind initial choices that may not yield the expected alignment. As students navigate these instances of trial-and-error, they acquire valuable insights, refining their ability to establish more compelling connections between tangram pieces.

While the educational benefits of Tangrams are substantial, a potential drawback exists if teachers intervene excessively. Over-guiding students by proposing adjustments to the pieces can hinder the development of independent problem-solving skills. Some educators, motivated by a concern for student frustration, might be inclined to provide excessive assistance. However, when faced with student frustration, a more constructive approach involves presenting a less challenging problem. This strategy empowers students to gradually leverage their existing knowledge, enabling them to overcome more difficult challenges. Supporting foundational relationships contributes to developing higher-level cognitive connections, a process known as constructive abstraction. Therefore, balancing guidance and independence is paramount for maximizing Tangrams' educational potential in developing spatial reasoning skills (Kamii et al., 2001).

Fostering Creativity through Tangrams

Tangrams serve as a versatile tool for nurturing creative thinking and geometric imagination, as emphasized by Brinckova et al. (2007). Tangrams can be used to design school activities that delve into concepts related to perimeter and area across different contexts. Tangrams also play a role in illustrating isometric transformations in measuring perimeter and area.

Transitioning to middle school, Brinckova et al. (2007) underscore the use of tangrams to model the world of numbers and shapes, employing a line segment as a unit. This approach allows students to identify relationships between the perimeter and area of various shapes. Moreover, tangrams provide a platform for measuring the sizes of different shapes and calculating their perimeter and area, utilizing tools such as the Pythagorean theorem or algebraic expressions.

Beyond structured activities, tangrams offer an open-ended avenue for exploration. Empowering students to create their own designs and challenges fosters independent thinking and self-expression. As tangram activities become more intricate, students develop creative problem-solving strategies, as highlighted by Schroth et al. (2018). This multifaceted approach positions tangrams as a dynamic and engaging tool that spans diverse educational levels.

Tangram activities are inherently conducive to collaborative learning experiences, offering a dynamic platform for group challenges where students collaborate to solve intricate puzzles. Such collaborative endeavors cultivate teamwork and foster effective communication and the exchange of diverse problem-solving strategies among students. Discussing potential approaches to tackling tangram puzzles encourages students to explore optimal piece placement and movement, promoting critical thinking and spatial reasoning (Schroth et al., 2018).

Beyond their mathematical applications, tangrams are a work for unleashing artistic creativity. Students can use the tangram pieces to craft complex designs patterns, or even represent real-world objects, integrating art and mathematics. This intersection of disciplines sparks imagination and enables students to appreciate the aesthetic dimensions of geometry.

Moreover, tangrams offer a flexible tool for integrating mathematical concepts into puzzles, prompting students to solve specific mathematical problems or equations. Organizing contests where students create as many different figures as possible within a set time limit adds an element of excitement to the learning process.

In line with Owen and Clements' (1998) perspective, using concrete materials has been identified as a strategic approach to encourage students to adapt their mental imagery and refine their problem-solving techniques. Building on this, Weng et al. (2020) conducted research to assess the effectiveness of both physical and virtual tangrams, focusing on learning engagement and achievement in preschool children. The findings revealed that children utilizing virtual tangrams exhibited heightened overall attention and participated in more multisensory behaviors compared to those using physical tangrams. Moreover, the experimental group using virtual tangrams completed the outlines in significantly less time than the control group, indicating the potential of virtual manipulatives in enhancing learning outcomes.

Embracing technology, educators can leverage digital Tangram apps to engage students through electronic devices. Platforms like Mathigon (https://mathigon.org/activities) provide rich opportunities for interactive tangram puzzles. The Tangram Builder activity on Mathigon allows students to progress from basic to advanced figures, enhancing their spatial reasoning skills in a digital environment.

Tangram puzzles further captivate learners through the exploration of tangram paradoxes. These paradoxes manifest as intricate designs meticulously crafted using all seven tangram pieces. While these designs may initially appear identical, closer scrutiny reveals subtle variations in their configurations. This nuanced diversity adds a layer of complexity and fascination to the world of tangram puzzles, challenging enthusiasts to discern and appreciate the intricate details that distinguish one paradoxical design from another.

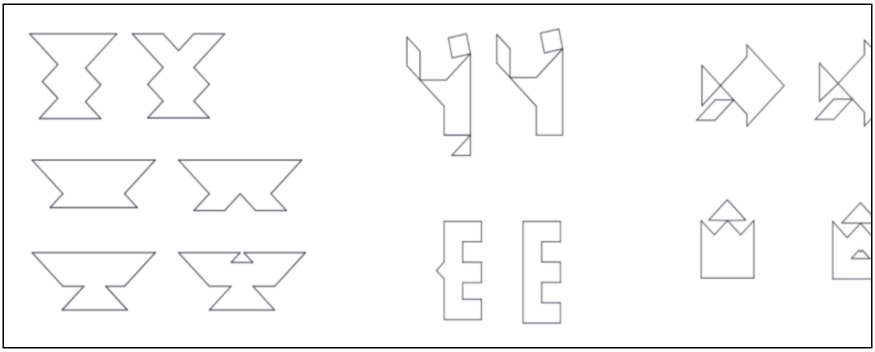

Figure 2. Sample Tangram Paradoxes (https://mathigon.org/task/tangram-paradoxes)

In conclusion, virtual manipulatives present a compelling advantage by providing a more engaging and enjoyable learning experience than their physical counterparts, as highlighted by Weng et al. (2020). It is essential to tailor activities to be age-appropriate and aligned with the students' mathematical proficiency levels to maximize their effectiveness. Customizing games to support specific teaching goals or learning objectives further enhances the potential of virtual manipulatives as dynamic and adaptive educational tools.

Practical Classroom Strategies

Brinckova and colleagues (2007) present practical approaches for integrating tangrams into educational settings, supplying a range of tangram activities appropriate for diverse learning styles and abilities.

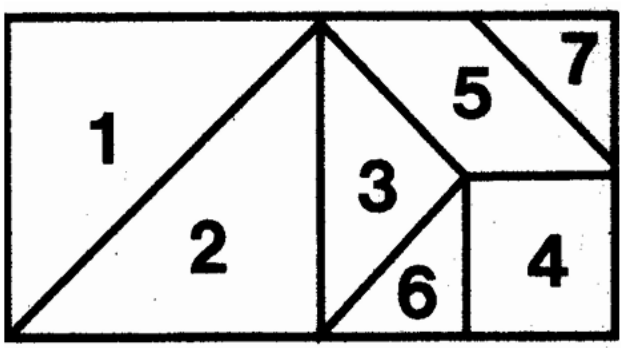

Figure 3. Tangram Tiles (Brinckova et al., 2007)

Integrating a two-unit approach into tangram activities is an adaptable and instructive method. The first unit corresponds to the side length of square 4, denoted as "s," while the second unit corresponds to the hypotenuse of triangle 7, referred to as "h." Through a demonstrative process, it becomes evident that, when given specific perimeter or area constraints, a diverse array of two-dimensional shapes with unique area and perimeter values can be generated by following to instructions.

Students can then be challenged to leverage this two-unit system in creative problem-solving tasks. Students use two congruent triangles from Tangram, either 1 and 2 or 6 and 7, to model planar shapes where identical side lengths are discerned. The outcomes of these modeling exercises can be documented, expressing the perimeter of the resulting figures in terms of the designated length units, "s" and "h."

In further exploration, students can be asked to create planar shapes using square 4 and the two triangles 6 and 7 from Tangram. The focus is on identifying sides of equal length and categorizing the solutions based on perimeter, the number, and size of angles, and the presence of parallel sides, as illustrated in Figure 4. As the shapes intertwine, students observe that one side of the triangle exceeds the length of the square's side, prompting a thought-provoking and didactically rich discussion. Considerations arise such as addressing the observed difference and categorizing the shapes without the ability to measure.

Introducing the two designated units, "s" and "h," facilitates the expression of perimeters for each shape, with Shape A having a perimeter of 6s, Shape B with 4s + 2h, Shape C with 4s + 2h, and so forth. Interestingly, all shapes exhibit a perimeter formula of 4s + 2h, except for Shape A. This approach encourages the application of symbols (s, h) as a problem-solving strategy, encouraging a broader inquiry of the perimeters of the remaining Tangram shapes (Brinckova et al., 2007).

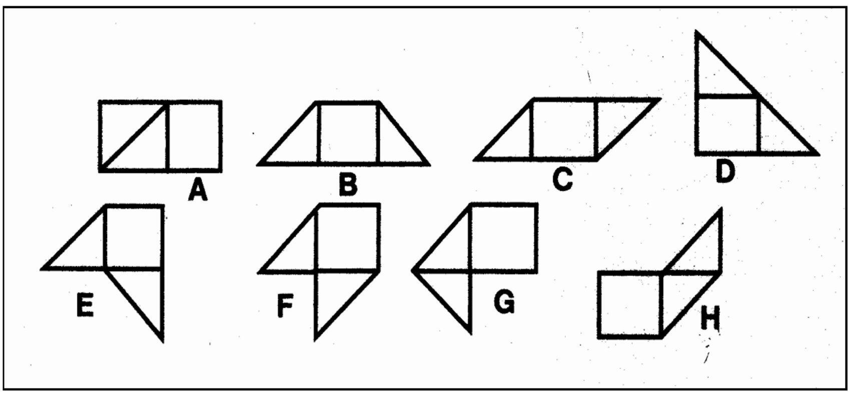

Figure 4. Tangram Configurations (Brinckova et al., 2007)

In exploring tangram activities, students engage in diverse tasks encompassing the assembly of Tangram pieces to create various shapes. They can initially construct fundamental shapes such as triangles, squares, and rectangles by combining the individual components. Tchoshanov (2011) suggests constructing squares using different numbers of pieces, including 1, 2, 3, 4, and 6. Moreover, students can employ all Tangram pieces to custom well-known polygons like triangles, squares, or rectangles.

Further complexity arises as students delve into generating triangles utilizing varying numbers of pieces, ranging from 2 to all 6 components. The challenge extends to identifying all possible solutions comprising five parts. Similarly, the construction of squares becomes an intricate task involving the utilization of 1 to 7 pieces. Notably, Tchoshanov (2011) highlights the impossibility of constructing a square with 6 pieces. Prompting students to discern and articulate the rationale behind this limitation requires leveraging the concepts of area and perimeter, designating one Tangram piece as the unit of area.

The integration of tangram problem-solving into the educational landscape aligns with the advanced cognitive capacities of middle school students, necessitating a higher level of strategic competence (Brinckova et al., 2007; Tchoshanov, 2011). An illustrative problem may involve students creating specific shapes using tangram pieces and subsequently comparing the perimeters and areas of these resultant shapes (Brinckova et al., 2007). Alternatively, students may assign one tangram piece as the unit of area, leading to the computation of areas for distinct parts of the puzzle (Brinckova et al., 2007; Tchoshanov, 2011).

Tchoshanov (2011) has classified levels of students' strategic competence during tangram activities:

Level 0: Non-strategic competence, characterized by a random trial approach.

Level 1: Pre-Strategic Competence, signifying an initial attempt at strategizing.

Level 2: Partial Strategic Competence, reflecting partial strategic thinking.

Level 3: Strategic Competence indicates a high level of strategic thinking and competence.

The application of perimeter and area information to deduce the side length of an imaginary square, followed by crafting the square using tangram pieces, exemplifies a manifestation of strategic competence within this educational framework.

Conclusion

Tangrams emerge as a strong pedagogical instrument for nurturing creativity within middle school mathematics, seamlessly intertwining geometric concepts with artistic expression and collaborative problem-solving. In this synthesis, tangrams facilitate an enriching learning experience, boosting students toward a deeper understanding of mathematics and fostering an appreciation for the beauty inherent in creative thinking. As educators continually seek innovative approaches to inspire the students' mathematical skills, the enduring appeal of tangrams stands as a guiding inspiration.

This useful tool has the unique capability to engage students with limited interest or proficiency in mathematics. The spectrum of engagement spans from younger students actively constructing intricate figures to their older counterparts transitioning to more complex geometrical shapes. These activities not only serve to cultivate fundamental skills, methods, and terminology associated with geometrical transformations but also empower students to attain competencies related to the visualization and recognition of geometrical figures within a broader context, as revealed by the insights of Brinckova et al. (2007).

The manipulation of the seven tangram puzzle pieces becomes an immersive experience for children, offering delightful puzzle-solving moments and fostering positive attitudes toward geometry. This interactive process enables children to naturally enhance their spatial sense and cultivate a fundamental understanding of geometric concepts and relationships. In contrast to activities with a single correct answer, tangrams provide puzzle-solving joy without imposing restrictive boundaries. With its open-ended and creative nature, Tangram are suitable for children of any age. Integrating tangrams into learning environments allows educators to promote a playful and enjoyable approach to geometry, contributing substantially to the holistic development of children's mathematical abilities.

In summary, tangrams emerge as a valuable educational tool for developing geometric skills and introducing a love for geometry from an early age. Their timeless and age-appropriate nature makes them a captivating and intellectual activity, providing children with an engaging avenue to explore the fascinating world of shapes and spatial relationships, as Bohning and Althous (1997) highlighted.

According to Kamii et al. (2001), the essential aspect in children's construction of logical mathematical knowledge is their ability to engage in thinking processes, a concept known as constructive abstraction. Encouraging children to think independently and establish spatial relationships is paramount for their cognitive development. In this regard, tangrams are highly recommended as educational tools. They act as catalysts for fostering thoughtful engagement and prompting children to imitate spatial connections, significantly contributing to their logical and mathematical understanding.

REFERENCES

Bohning, G., & Althouse, J. K. (1997). Using tangrams to teach geometry to young children. *Early Childhood Education Journal*, *24*, 239–242.

Brincková, J., Haviar, M., & Dzúriková, I. (2007). Tangram in mathematics for lower secondary school. *More insufficient secondary school teacher training in mathematics: Comparison and best practices*, 205-215.

Kamii, C., Lewis, B. A., & Kirkland, L. (2001). Manipulatives: When are they useful? *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 21–31.

Mathigon, (2023, Dec). https://mathigon.org/

Owens, K. D., & Clements, M. K. (1998). Representations in spatial problem-solving in the classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 197–218.

Schroth, S., Tang, H., Carr-chellman, A., & AlQahtani, M. (2019). An exploratory study of Osmo tangram and tangram manipulative in an elementary mathematics classroom. *Journal of Educational Technology Development and Exchange (JETDE)*, *11*(1), 1.